

1. Для положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

2. Неотрицательные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a + b + c = 2$ . Докажите неравенство  $abc \geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c)$ .

3. Для положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3 \geq a^2b^2c^2(a + b + c).$$

4. Для положительных  $x, y, z$  верно  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Докажите, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z.$$

5. Положительные  $x, y, z$  таковы, что  $xyz = 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

6. (ИМО). Положительные  $a, b, c, d$  таковы, что  $ab + bc + cd + da = 1$ . Докажите неравенство

$$\sum_{cyclic} \frac{a^3}{b+c+d} \geq \frac{1}{3}.$$

7. **Неравенство Гёльдера.** Для неотрицательных  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$  докажите неравенство

$$(a_1^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1b_1c_1 + \dots + a_nb_nc_n)^3.$$

8. (ИМО 2012). Неотрицательные  $a_2, \dots, a_n$  таковы, что  $a_2a_3 \dots a_n = 1$ . Докажите неравенство

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n \geq n^n.$$

9. (Япония 2010). Для положительных чисел  $x, y, z$  докажите, что

$$\frac{1 + zx + zy}{(1 + x + y)^2} + \frac{1 + yx + yz}{(1 + x + z)^2} + \frac{1 + xy + xz}{(1 + y + z)^2} \geq 1.$$

1. Для положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

2. Неотрицательные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a + b + c = 2$ . Докажите неравенство  $abc \geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c)$ .

3. Для положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3 \geq a^2b^2c^2(a + b + c).$$

4. Для положительных  $x, y, z$  верно  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Докажите, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z.$$

5. Положительные  $x, y, z$  таковы, что  $xyz = 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

6. (ИМО). Положительные  $a, b, c, d$  таковы, что  $ab + bc + cd + da = 1$ . Докажите неравенство

$$\sum_{cyclic} \frac{a^3}{b+c+d} \geq \frac{1}{3}.$$

7. **Неравенство Гёльдера.** Для неотрицательных  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$  докажите неравенство

$$(a_1^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1b_1c_1 + \dots + a_nb_nc_n)^3.$$

8. (ИМО 2012). Неотрицательные  $a_2, \dots, a_n$  таковы, что  $a_2a_3 \dots a_n = 1$ . Докажите неравенство

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n \geq n^n.$$

9. (Япония 2010). Для положительных чисел  $x, y, z$  докажите, что

$$\frac{1 + zx + zy}{(1 + x + y)^2} + \frac{1 + yx + yz}{(1 + x + z)^2} + \frac{1 + xy + xz}{(1 + y + z)^2} \geq 1.$$