10 класс **По мотивам "$x+y$"** 30 октября 2017

1. Все клетки клетчатого квадрата $2n \times 2n$ раскрашены в один из четырёх цветов. В каждом блоке 2×2 присутствуют все 4 цвета. Докажите, что 4 угловых клетки раскрашены в разные цвета.

2. В ряд выложено 52 карты рубашкой вверх. Каждую минуту Петя переворачивает две из них, если левая из этих двух карт лежит рубашкой вверх. Докажите, что рано или поздно этот увлекательный процесс закончится.

3. Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABP = \angle PCA$. Точка Q такова, что четырёхугольник $PBQC$ является параллелограммом. Докажите, что $\angle QAB = \angle CAP$.

4. Каждое из натуральных чисел чисел покрашено в красный, синий или зелёный цвет. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c такие, что все числа $a, b, c, a+b, b+c, c+a, a+b+c$ покрашены в одинаковый цвет.

5. Конечно ли множество пар натуральных чисел (m, n) таких, что m^2+1 делится на n, а n^2+1 делится на m?

6. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ таков, что $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Пусть R_A, R_C, R_E — радиусы описанных окружностей треугольников FAB, BCD, DEF соответственно, P — периметр шестиугольника. Докажите, что $R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{P}{2}$.

10 класс **По мотивам "$x+y$"** 30 октября 2017

1. Все клетки клетчатого квадрата $2n \times 2n$ раскрашены в один из четырёх цветов. В каждом блоке 2×2 присутствуют все 4 цвета. Докажите, что 4 угловых клетки раскрашены в разные цвета.

2. В ряд выложено 52 карты рубашкой вверх. Каждую минуту Петя переворачивает две из них, если левая из этих двух карт лежит рубашкой вверх. Докажите, что рано или поздно этот увлекательный процесс закончится.

3. Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABP = \angle PCA$. Точка Q такова, что четырёхугольник $PBQC$ является параллелограммом. Докажите, что $\angle QAB = \angle CAP$.

4. Каждое из натуральных чисел чисел покрашено в красный, синий или зелёный цвет. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c такие, что все числа $a, b, c, a+b, b+c, c+a, a+b+c$ покрашены в одинаковый цвет.

5. Конечно ли множество пар натуральных чисел (m, n) таких, что m^2+1 делится на n, а n^2+1 делится на m?

6. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ таков, что $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Пусть R_A, R_C, R_E — радиусы описанных окружностей треугольников FAB, BCD, DEF соответственно, P — периметр шестиугольника. Докажите, что $R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{P}{2}$.