10 класс — **Веса** — 26 октября 2017

1. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по несколько в одной клетке). Расположение фишек называется *финальным*, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.

(a) За одну операцию разрешается снять две фишки с клетки с номером k и добавить одну в клетку с номером $k+1$. Докажите, что финальное состояние не зависит от порядка операций.

(b) За одну операцию разрешается снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что все финальные состояния, в которых на каждой клетке лежит не более одной фишки, одинаковы.

2. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

3. Некоторые из фанатов "Спартака" враждуют между собой, причем у каждого фаната не более 100 врагов. Докажите, что их можно рассадить на две трибуны так, чтобы каждый фанат с восточной трибуны имел на ней не более 57 врагов, а каждый фанат с южной трибуны имел на ней не более 42 врагов.

4. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами (i, j) и добавить по фишке в узлы $(i+1, j)$, $(i, j+1)$; при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.

(a) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.

(b) Докажите, что если изначально в узле $(0, 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

5. Саша и Игорь играют в игру. В каждом из миллиона раундов оба игрока показывают на руке один или два пальца. Если общее количество выкинутых пальцев на руках нечетно, то выигрывает Саша, если четно — Игорь, причем сумма выигрыша равна общему количеству выкинутых пальцев. Кто при правильной игре выиграет больше?

6. На банкете магической олимпиады Хогвартса присутствало 14 членов жюри. Выпив 35 бутылок зелья, они решили расставить их на круглом столе так, чтобы на отрезке между любыми двумя людьми стояла как минимум одна бутылка. Докажите, что у них это не получится.

7. У Серёжи имеется коллекция из 1000 гирек различного веса и чашечные весы, на каждую чашку которых помещается не более одной гирьки. За какое наименьшее количество взвешиваний он сможет найти две самые тяжелые гирьки?

10 класс — **Веса** — 26 октября 2017

1. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по несколько в одной клетке). Расположение фишек называется *финальным*, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.

(a) За одну операцию разрешается снять две фишки с клетки с номером k и добавить одну в клетку с номером $k+1$. Докажите, что финальное состояние не зависит от порядка операций.

(b) За одну операцию разрешается снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что все финальные состояния, в которых на каждой клетке лежит не более одной фишки, одинаковы.

2. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

3. Некоторые из фанатов "Спартака" враждуют между собой, причем у каждого фаната не более 100 врагов. Докажите, что их можно рассадить на две трибуны так, чтобы каждый фанат с восточной трибуны имел на ней не более 57 врагов, а каждый фанат с южной трибуны имел на ней не более 42 врагов.

4. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами (i, j) и добавить по фишке в узлы $(i+1, j)$, $(i, j+1)$; при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.

(a) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.

(b) Докажите, что если изначально в узле $(0, 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

5. Саша и Игорь играют в игру. В каждом из миллиона раундов оба игрока показывают на руке один или два пальца. Если общее количество выкинутых пальцев на руках нечетно, то выигрывает Саша, если четно — Игорь, причем сумма выигрыша равна общему количеству выкинутых пальцев. Кто при правильной игре выиграет больше?

6. На банкете магической олимпиады Хогвартса присутствало 14 членов жюри. Выпив 35 бутылок зелья, они решили расставить их на круглом столе так, чтобы на отрезке между любыми двумя людьми стояла как минимум одна бутылка. Докажите, что у них это не получится.

7. У Серёжи имеется коллекция из 1000 гирек различного веса и чашечные весы, на каждую чашку которых помещается не более одной гирьки. За какое наименьшее количество взвешиваний он сможет найти две самые тяжелые гирьки?