

1. На биссектрисе угла с вершиной A отмечена точка P . Через P проводится прямая, пересекающая стороны угла в точках B и C . Докажите, что величина $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ не зависит от выбора прямой.

2. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC вторично пересекает его описанную окружность в точке A_0 . Пусть B_1 и C_1 — середины AC и AB соответственно. Серединные перпендикуляры к AC и AB пересекают прямую AA_0 в точках B_2, C_2 соответственно. Докажите, что площади треугольников $A_0B_1B_2$ и $A_0C_1C_2$ равны.

3. Дан треугольник ABC . Точка B_1 внутри него такова, что $\angle B_1AC = \frac{\angle A}{3}$, $\angle B_1CA = \frac{\angle C}{3}$. Аналогично определяются точки A_1 и C_1 .

а) Пусть $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma, R$ — радиус описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $AB_1 = 8R \sin \beta \sin \gamma \sin(60^\circ + \beta)$.

б) **Теорема Морлея.** Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный.

4. Точка X лежит внутри треугольника ABC . Докажите, что хотя бы один из углов $\angle XAB, \angle XBC, \angle XCA$ не превосходит 30° .

5. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) точка O — центр описанной окружности, BH_b — высота. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO , пересекает прямую BO в точке X . Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике ABC точки I_a и I_c — центры вневписанных окружностей, H — основание высоты из вершины B . Прямая I_aH пересекает BC в точке A' , а прямая I_cH пересекает AB в точке C' . Докажите, что $A'C'$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC .

7. Прямая l , проходящая через ортоцентр H остроугольного треугольника ABC , пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через H перпендикулярно l , пересекает сторону AB треугольника в точке F . Докажите, что $DH/HE = AF/FB$.

8. Точка K лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC . Оказалось, что радиус вписанной окружности треугольника ABK равен радиусу вневписанной окружности треугольника ACK , касающейся CK , и равен r . Докажите, что $r = h/4$, где h — высота, опущенная из B на AC .

1. На биссектрисе угла с вершиной A отмечена точка P . Через P проводится прямая, пересекающая стороны угла в точках B и C . Докажите, что величина $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ не зависит от выбора прямой.

2. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC вторично пересекает его описанную окружность в точке A_0 . Пусть B_1 и C_1 — середины AC и AB соответственно. Серединные перпендикуляры к AC и AB пересекают прямую AA_0 в точках B_2, C_2 соответственно. Докажите, что площади треугольников $A_0B_1B_2$ и $A_0C_1C_2$ равны.

3. Дан треугольник ABC . Точка B_1 внутри него такова, что $\angle B_1AC = \frac{\angle A}{3}$, $\angle B_1CA = \frac{\angle C}{3}$. Аналогично определяются точки A_1 и C_1 .

а) Пусть $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma, R$ — радиус описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $AB_1 = 8R \sin \beta \sin \gamma \sin(60^\circ + \beta)$.

б) **Теорема Морлея.** Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный.

4. Точка X лежит внутри треугольника ABC . Докажите, что хотя бы один из углов $\angle XAB, \angle XBC, \angle XCA$ не превосходит 30° .

5. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) точка O — центр описанной окружности, BH_b — высота. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO , пересекает прямую BO в точке X . Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике ABC точки I_a и I_c — центры вневписанных окружностей, H — основание высоты из вершины B . Прямая I_aH пересекает BC в точке A' , а прямая I_cH пересекает AB в точке C' . Докажите, что $A'C'$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC .

7. Прямая l , проходящая через ортоцентр H остроугольного треугольника ABC , пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через H перпендикулярно l , пересекает сторону AB треугольника в точке F . Докажите, что $DH/HE = AF/FB$.

8. Точка K лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC . Оказалось, что радиус вписанной окружности треугольника ABK равен радиусу вневписанной окружности треугольника ACK , касающейся CK , и равен r . Докажите, что $r = h/4$, где h — высота, опущенная из B на AC .