10 класс **Давайте посчитаем** 9 октября 2017

1. В треугольнике ABC с углами $\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\gamma$ и радиусом описанной окружности R провели все **а)** высоты **б)** биссектрисы. Найдите длины всех отрезочков на рисунке.

2. В треугольнике с тупым углом A проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точки B_1 на прямые BA и BC, равен отрезку, соединяющему проекции точки C_1 на прямые CA и CB.

3. AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

4. Докажите, что луч OB внутри угла AOC однозначно восстанавливается по значению величины $\sin\angle AOB/\sin\angle BOC$.

5. Теорема Чевы в синусах. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 лежат внутри углов BAC, ABC, ACB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle CAA_1}{\sin\angle BAA_1}\cdot\frac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle CBB_1}\cdot\frac{\sin\angle BCC_1}{\sin\angle ACC_1}=1.$$

6. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Отражения прямых AB, AC относительно прямых CI, BI соответственно пересекаются в точке K. Докажите, что $KI\perp BC$.

7. Внутри угла с вершиной O отмечена точка P. Рассмотрим всевозможные пары точек X и Y на сторонах угла с условием $\angle OPX=\angle OPY$. Докажите, что все прямые XY пересекаются в одной точке.

8. Дан правильный треугольник ABC и внутри него произвольная точка X. Точки B_1, A_1 и C_1 симметричны точке X относительно сторон AC, BC и AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

9. Две окружности радиусов r и R касаются прямой l в точках A и B. Пусть C — точка пересечения этих окружностей, наиболее удалённая от l. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC не зависит от положения окружностей.

10. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны C', A', B' соответственно. Оказалось, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, а радиус вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ вдвое меньше, чем радиус вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

10 класс **Давайте посчитаем** 9 октября 2017

1. В треугольнике ABC с углами $\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\gamma$ и радиусом описанной окружности R провели все **а)** высоты **б)** биссектрисы. Найдите длины всех отрезочков на рисунке.

2. В треугольнике с тупым углом A проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точки B_1 на прямые BA и BC, равен отрезку, соединяющему проекции точки C_1 на прямые CA и CB.

3. AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

4. Докажите, что луч OB внутри угла AOC однозначно восстанавливается по значению величины $\sin\angle AOB/\sin\angle BOC$.

5. Теорема Чевы в синусах. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 лежат внутри углов BAC, ABC, ACB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle CAA_1}{\sin\angle BAA_1}\cdot\frac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle CBB_1}\cdot\frac{\sin\angle BCC_1}{\sin\angle ACC_1}=1.$$

6. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Отражения прямых AB, AC относительно прямых CI, BI соответственно пересекаются в точке K. Докажите, что $KI\perp BC$.

7. Внутри угла с вершиной O отмечена точка P. Рассмотрим всевозможные пары точек X и Y на сторонах угла с условием $\angle OPX=\angle OPY$. Докажите, что все прямые XY пересекаются в одной точке.

8. Дан правильный треугольник ABC и внутри него произвольная точка X. Точки B_1, A_1 и C_1 симметричны точке X относительно сторон AC, BC и AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

9. Две окружности радиусов r и R касаются прямой l в точках A и B. Пусть C — точка пересечения этих окружностей, наиболее удалённая от l. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC не зависит от положения окружностей.

10. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны C', A', B' соответственно. Оказалось, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, а радиус вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ вдвое меньше, чем радиус вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC — правильный.