10 класс — **Спуск в ТЧ** — 25 сентября 2017

1. Докажите, что уравнение $x^3+7y^3+49z^3=0$ имеет в целых числах только нулевое решение.

2. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$ имеет в целых числах только нулевое решение.

3. Найдите все решения уравнения $5x^3+11y^3+13z^3=0$ в целых числах.

4. В бесконечной последовательности $\{x_n\}$ первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

5. Найдите все простые числа p, для которых существуют натуральные числа a, b, n такие, что $p^n=a^3+b^3$.

6. а) Имеется 101 корова, каждая весит целое число грамм. Известно, что любые 100 из них можно разбить на 2 стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят одинаково.

б) А если веса всех коров рациональны?

в) А если веса коров могут быть равны любому действительному (неотрицательному) числу?

7. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, m – наибольший коэффициент многочлена f. Известно, что для некоторых натуральных чисел $a<b$ имеют место равенства $f(a)=g(a)$ и $f(b)=g(b)$. Докажите, что если $b>m$, то многочлены f и g совпадают.

8. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{64}$ — произвольный набор натуральных чисел. Докажите, что если образовать из него новый набор $b_1, b_2, \ldots, b_{64}$ по правилу $b_k=|a_{k+1}-a_k|$, где $k=1,2,\ldots,64$ и $a_{65}=a_1$, затем из набора $b_1, b_2, \ldots, b_{64}$ по тому же правилу образовать новый набор, и так далее, то через несколько шагов мы придём к набору, состоящему из одних нулей.

10 класс — **Спуск в ТЧ** — 25 сентября 2017

1. Докажите, что уравнение $x^3+7y^3+49z^3=0$ имеет в целых числах только нулевое решение.

2. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$ имеет в целых числах только нулевое решение.

3. Найдите все решения уравнения $5x^3+11y^3+13z^3=0$ в целых числах.

4. В бесконечной последовательности $\{x_n\}$ первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

5. Найдите все простые числа p, для которых существуют натуральные числа a, b, n такие, что $p^n=a^3+b^3$.

6. а) Имеется 101 корова, каждая весит целое число грамм. Известно, что любые 100 из них можно разбить на 2 стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят одинаково.

б) А если веса всех коров рациональны?

в) А если веса коров могут быть равны любому действительному (неотрицательному) числу?

7. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, m – наибольший коэффициент многочлена f. Известно, что для некоторых натуральных чисел $a<b$ имеют место равенства $f(a)=g(a)$ и $f(b)=g(b)$. Докажите, что если $b>m$, то многочлены f и g совпадают.

8. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{64}$ — произвольный набор натуральных чисел. Докажите, что если образовать из него новый набор $b_1, b_2, \ldots, b_{64}$ по правилу $b_k=|a_{k+1}-a_k|$, где $k=1,2,\ldots,64$ и $a_{65}=a_1$, затем из набора $b_1, b_2, \ldots, b_{64}$ по тому же правилу образовать новый набор, и так далее, то через несколько шагов мы придём к набору, состоящему из одних нулей.