

1. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ строится следующим образом: a_0 — некоторое натуральное число; $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, если $\sqrt{a_n}$ — целое число; $a_{n+1} = a_n + 3$ иначе. При каких a_0 существует число A , встречающееся в этой последовательности бесконечно много раз?

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + 2\angle C = 180^\circ$. В треугольнике ABD проведена биссектриса AE . Серединный перпендикуляр к отрезку AE пересекает лучи CB и CD в точках X и Y соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CYAX$ — вписанный.

3. В некотором графе между любыми двумя вершинами есть как путь чётной длины, так и путь длины не более 100. При каком наименьшем натуральном d между любыми двумя вершинами этого графа гарантированно есть путь чётной длины не более d ? (Длина пути — это количество рёбер в нём; пути могут самопересекаться как по вершинам, так и по рёбрам.)

4. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, больших 1, для которых выполнено равенство $[a - 1, b - 1] + [a + 1, b + 1] = 2[a, b]$.

5. Пусть R и S — две точки на окружности ω такие, что RS не является диаметром. Пусть l — касательная к ω в точке R . Точка T такова, что S — середина отрезка RT . Точка J выбрана на меньшей дуге RS окружности ω так, что окружность Γ , описанная около треугольника JST , пересекает l в двух точках. Пусть A — та из них, которая ближе к R . Прямая AJ вторично пересекает ω в точке K . Докажите, что прямая KT касается Γ .

6. В строчку выписаны числа $\frac{1}{2002}, \frac{1}{2003}, \dots, \frac{1}{2017}$. Лёша хочет поставить перед восьмью из них знак "+", а перед восьмью из них знак "-" так, чтобы модуль полученного выражения был минимален. Как ему быть?

7. Пусть $Q(t)$ — квадратный трёхчлен с двумя действительными корнями. Докажите, что существует приведённый многочлен $P(x)$, не являющийся константой, такой, что модули всех коэффициентов многочлена $Q(P(x))$, быть может кроме старшего, меньше чем 0,001.

8. Дано натуральное N . Натуральные числа от 1 до $N^2 + N$ выписаны в строчку в некотором порядке. Андрей Борисович хочет вычеркнуть $N^2 - N$ из них так, чтобы среди оставшихся $2N$ чисел ничего не стояло между двумя максимальными из них, между 3-м и 4-м по величине, \dots , между двумя минимальными из них. Обязательно ли у него это получится?

1. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ строится следующим образом: a_0 — некоторое натуральное число; $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, если $\sqrt{a_n}$ — целое число; $a_{n+1} = a_n + 3$ иначе. При каких a_0 существует число A , встречающееся в этой последовательности бесконечно много раз?

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + 2\angle C = 180^\circ$. В треугольнике ABD проведена биссектриса AE . Серединный перпендикуляр к отрезку AE пересекает лучи CB и CD в точках X и Y соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CYAX$ — вписанный.

3. В некотором графе между любыми двумя вершинами есть как путь чётной длины, так и путь длины не более 100. При каком наименьшем натуральном d между любыми двумя вершинами этого графа гарантированно есть путь чётной длины не более d ? (Длина пути — это количество рёбер в нём; пути могут самопересекаться как по вершинам, так и по рёбрам.)

4. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, больших 1, для которых выполнено равенство $[a - 1, b - 1] + [a + 1, b + 1] = 2[a, b]$.

5. Пусть R и S — две точки на окружности ω такие, что RS не является диаметром. Пусть l — касательная к ω в точке R . Точка T такова, что S — середина отрезка RT . Точка J выбрана на меньшей дуге RS окружности ω так, что окружность Γ , описанная около треугольника JST , пересекает l в двух точках. Пусть A — та из них, которая ближе к R . Прямая AJ вторично пересекает ω в точке K . Докажите, что прямая KT касается Γ .

6. В строчку выписаны числа $\frac{1}{2002}, \frac{1}{2003}, \dots, \frac{1}{2017}$. Лёша хочет поставить перед восьмью из них знак "+", а перед восьмью из них знак "-" так, чтобы модуль полученного выражения был минимален. Как ему быть?

7. Пусть $Q(t)$ — квадратный трёхчлен с двумя действительными корнями. Докажите, что существует приведённый многочлен $P(x)$, не являющийся константой, такой, что модули всех коэффициентов многочлена $Q(P(x))$, быть может кроме старшего, меньше чем 0,001.

8. Дано натуральное N . Натуральные числа от 1 до $N^2 + N$ выписаны в строчку в некотором порядке. Андрей Борисович хочет вычеркнуть $N^2 - N$ из них так, чтобы среди оставшихся $2N$ чисел ничего не стояло между двумя максимальными из них, между 3-м и 4-м по величине, \dots , между двумя минимальными из них. Обязательно ли у него это получится?