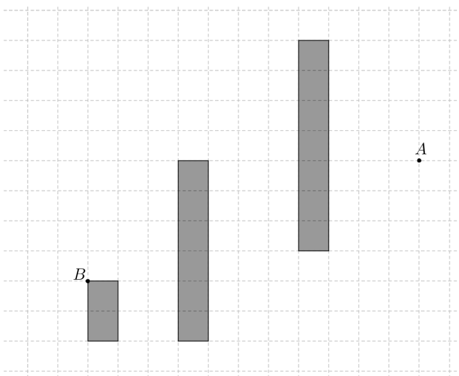
# III Иранская олимпиада по геометрии. Начинающие

**1.** Али хочет добраться из точки $A$ в точку $B$ (см. рис.). По дороге ему нельзя заходить в закрашенные участки плоскости, а в остальные — можно. Путешествовать Али можно не только по линиям сетки, но и по всей плоскости. Помогите Али найти самый короткий путь из точки $A$ в точку $B$. Просто нарисуйте путь и посчитайте его длину.




**2.** Вокруг треугольника $ABC$ $(AC > AB)$ описана окружность $\omega$. На стороне $AC$ выбрана точка $X$, а на окружности $\omega$ — точка $Y$ так, что $CX = CY = AB$, а точки $A$ и $Y$ лежат по разные стороны от прямой $BC$. Прямая $XY$ вторично пересекает окружность $\omega$ в точке $P$. Докажите, что $PB = PC$.

**3.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ никакие две стороны не параллельны. На каждой паре его соседних сторон построили параллелограммы. Докажите, что среди четырех новых точек ровно одна лежит внутри четырёхугольника $ABCD$.

**4.** Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом $A$. Серединный перпендикуляр к гипотенузе $BC$ пересекает прямую $AC$ в точке $K$, а серединный перпендикуляр к отрезку $BK$ пересекает прямую $AB$ в точке $L$. Оказалось, что $CL$ — биссектриса угла $ACB$. Найдите все возможные значения углов $B$ и $C$.

**5.** Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что

$$\angle ADC = 135^\circ, \quad \angle ADB - \angle ABD = 2\angle DAB = 4\angle CBD, \quad BC = \sqrt{2}\,CD.$$

Докажите, что $AB = BC + AD$.

# III Иранская олимпиада по геометрии. Продолжающие

**1.** На боковых сторонах трапеции $ABCD$ ($AB||CD$) как на диаметрах построены окружности $\omega_1$ и $\omega_2$. Пусть $X$ и $Y$ — произвольные точки на $\omega_1$ и $\omega_2$ соответственно. Докажите, что длина отрезка $XY$ не превосходит половины периметра четырёхугольника $ABCD$.

**2.** Окружности $C_1$ и $C_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Касательная в точке $A$ к окружности $C_1$ пересекает $C_2$ в точке $P$. Прямая $PB$ вторично пересекает $C_1$ в точке $Q$. Из точки $Q$ проведена касательная $QD$ к окружности $C_2$ такая, что точки $A$ и $D$ лежат по разные стороны от прямой $PQ$. Эта касательная вторично пересекает $C_1$ в точке $C$. Докажите, что $AD$ является биссектрисой угла $CAP$.

**3.** Найдите все натуральные числа $N$ такие, что существует треугольник, который можно разрезать на $N$ подобных четырёхугольников.

**4.** Касательная в точке $A$ описанной окружности $\omega$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle A = 90°$) пересекает прямую $BC$ в точке $P$. Точка $M$ — середина дуги $AB$, не содержащей вершину $C$. Прямая $PM$ пересекает $\omega$ второй раз в точке $Q$. Касательная к $\omega$ в точке $Q$ пересекает прямую $AC$ в точке $K$. Докажите, что $\angle PKC = 90°$.

**5.** Окружности $\omega$ и $\omega'$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Касательная к окружности $\omega$ в точке $A$ пересекает $\omega'$ в точке $C$; касательная к окружности $\omega'$ в точке $A$ пересекает $\omega$ в точке $D$. Биссектриса угла $CAD$ пересекает $\omega$ и $\omega'$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Внешняя биссектриса угла $CAD$ пересекает $\omega$ и $\omega'$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку $XY$ касается описанной окружности треугольника $BEF$.

# III Иранская олимпиада по геометрии. Профессионалы

**1.** Окружности $\omega$ и $\omega'$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Касательная к окружности $\omega$ в точке $A$ пересекает окружность $\omega'$ в точке $C$; касательная к окружности $\omega'$ в точке $A$ пересекает $\omega$ в точке $D$. Прямая $CD$ пересекает окружности $\omega$ и $\omega'$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Перпендикуляр из точки $E$ к прямой $AC$ пересекает $\omega'$ в точке $P$; перпендикуляр из точки $F$ к прямой $AD$ пересекает $\omega$ в точке $Q$. Оказалось, что точки $A$, $P$ и $Q$ лежат по одну сторону от прямой $CD$. Докажите, что точки $A$, $P$ и $Q$ лежат на одной прямой.

**2.** В остроугольном треугольнике $ABC$ точка $M$ — середина стороны $AC$, $AD$ — высота. Внутри треугольника $ABC$ отметили точку $X$ такую, что $\angle AXB = \angle DXM = 90^\circ$. Докажите, что $\angle XMB = 2\angle MBC$.

**3.** Продолжения сторон $AD$ и $BC$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $P$, причем точка $A$ лежит между $D$ и $P$. Точки $I_1$ и $I_2$ — центры вписанных окружностей треугольников $PAB$ и $PDC$ соответственно. Пусть $O$ – центр описанной окружности треугольника $PAB$, $H$ — ортоцентр треугольника $PDC$. Докажите, что описанные окружности треугольников $AI_1B$ и $DHC$ касаются тогда и только тогда, когда касаются описанные окружности треугольников $AOB$ и $DI_2C$.

**4.** Продолжения сторон $AB$ и $CD$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$, продолжения сторон $AD$ и $BC$ — в точке $F$, причем точка $A$ лежит между точками $B$ и $E$, а также между точками $D$ и $F$. Диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $P$. Окружность $\omega_1$ проходит через точку $D$ и касается прямой $AC$ в точке $P$. Окружность $\omega_2$ проходит через точку $C$ и касается прямой $BD$ в точке $P$. Пусть $X$ — точка пересечения окружности $\omega_1$ и прямой $AD$, а $Y$ — точка пересечения окружности $\omega_2$ и прямой $BC$. Пусть $Q$ — вторая точка пересечения окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$. Докажите, что перпендикуляр из точки $P$ к прямой $EF$ проходит через центр описанной окружности треугольника $XQY$.

**5.** Существуют ли шесть точек плоскости $X_1$, $X_2$, $Y_1$, $Y_2$, $Z_1$, $Z_2$ таких, что треугольники $X_iY_jZ_k$ подобны для всех наборов $i, j, k$, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 2$?