

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и ... еще одна точка!

Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC , H – его ортоцентр, M – середина AB . Окружности ω с центром O и ω_1 с центром O_1 , описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, вторично пересекаются в точке P .

1. Докажите, что точки M , H и P лежат на одной прямой.
2. Докажите, что: **а)** окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 , проходят через точку P ; **б)** PM – биссектриса углов APA_1 и BPB_1 ; **в)** прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH .
3. Пусть L_1 и L_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника AMA_1 , с прямыми BC и AC соответственно, а K_1 и K_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника BMB_1 , с прямыми AC и BC соответственно. Докажите, что: **а)** L_1 , K_1 , M и O лежат на одной прямой; **б)** L_2 , K_2 , M и O_1 лежат на одной прямой; **в)** L_1 , K_1 , L_2 и K_2 лежат на одной окружности; **г)** прямые L_1L_2 , K_1K_2 и PM пересекаются в одной точке.
4. Пусть прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке S , R – середина отрезка CM . Докажите, что: **а)** точки C , P и S лежат на одной прямой; **б)** прямые SH и CM перпендикулярны; **в)** прямые OR и SC перпендикулярны.
5. Пусть касательные к окружности ω , проведенные в точках A и B , пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z . Докажите, что: **а)** точка M – центр вписанной окружности треугольника XYZ ; **б)** окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 , проходят через точки X и Y соответственно; **в)** прямые MH , A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке (C_1 – точка пересечения CH и AB). **г)** прямая ZP проходит через точку H_c , симметричную H относительно стороны AB . **д)** описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P . **е)** прямые AP , BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и ... еще одна точка!

Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC , H – его ортоцентр, M – середина AB . Окружности ω с центром O и ω_1 с центром O_1 , описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, вторично пересекаются в точке P .

1. Докажите, что точки M , H и P лежат на одной прямой.
2. Докажите, что: **а)** окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 , проходят через точку P ; **б)** PM – биссектриса углов APA_1 и BPB_1 ; **в)** прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH .
3. Пусть L_1 и L_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника AMA_1 , с прямыми BC и AC соответственно, а K_1 и K_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника BMB_1 , с прямыми AC и BC соответственно. Докажите, что: **а)** L_1 , K_1 , M и O лежат на одной прямой; **б)** L_2 , K_2 , M и O_1 лежат на одной прямой; **в)** L_1 , K_1 , L_2 и K_2 лежат на одной окружности; **г)** прямые L_1L_2 , K_1K_2 и PM пересекаются в одной точке.
4. Пусть прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке S , R – середина отрезка CM . Докажите, что: **а)** точки C , P и S лежат на одной прямой; **б)** прямые SH и CM перпендикулярны; **в)** прямые OR и SC перпендикулярны.
5. Пусть касательные к окружности ω , проведенные в точках A и B , пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z . Докажите, что: **а)** точка M – центр вписанной окружности треугольника XYZ ; **б)** окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 , проходят через точки X и Y соответственно; **в)** прямые MH , A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке (C_1 – точка пересечения CH и AB). **г)** прямая ZP проходит через точку H_c , симметричную H относительно стороны AB . **д)** описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P . **е)** прямые AP , BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.