23.05.17

Применим инверсию

Использование инверсии существенно облегчает решение ряда геометрических задач, связанных с окружностями, и не только.

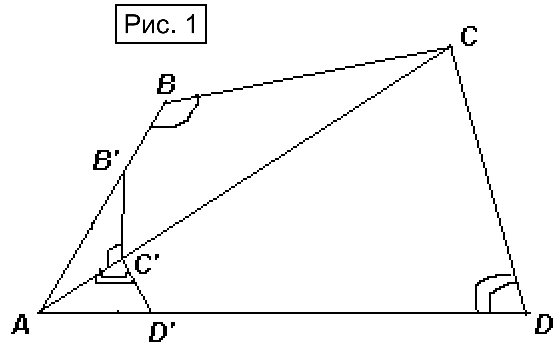
В частности, в неявном виде мы уже использовали инверсию при доказательстве ***неравенства Птолемея***.

Вспомним это доказательство, приведя его к более естественному виду.

Пример 1. Докажите, что в любом четырехугольнике *ABCD* $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$.

Решение. Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром *A* радиуса *R*. Образами точек *B*, *C* и *D* будут точки *B*', *C*' и *D*', лежащие на лучах *AB*, *AC* и *AD* соответственно причем $AB' \cdot AB = AC' \cdot AC = AD' \cdot AD = R^2$ (см. рис. 1). Тогда $\frac{AB'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$, то есть $B'C' = R^2 \cdot \frac{BC}{AB \cdot AC}$. Аналогично, $C'D' = R^2 \cdot \frac{CD}{AC \cdot AD}$ и $B'D' = R^2 \cdot \frac{BD}{AB \cdot AD}$.

Рис. 1

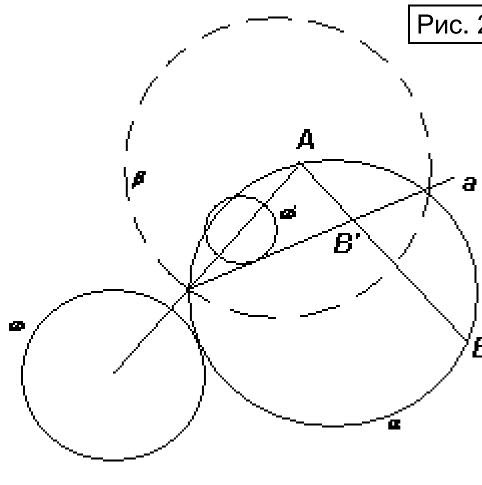


По неравенству треугольника $B'C' + C'D' \geq B'D'$. Подставив полученные выражения в это неравенство и освободившись от знаменателя, получим требуемое.

Инверсия помогает и при решении некоторых сложных задач на построение, так как мы умеем строить образы точек при заданной инверсии.

Пример 2. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки *A* и *B*, и касающуюся данной окружности ω.

Рис. 2



Решение. Заметим, что если обе точки *A* и *B* лежат на окружности ω, то задача решений не имеет. Пусть, например, $A \notin \omega$.

Предположим, что искомая окружность α построена (см. рис. 2). При инверсии с центром *A* точка *B* перейдет в некоторую точку *B*', а окружность α – в прямую *a*, содержащую *B*'. Так как окружность α касается ω, то прямая *a* касается ее образа ω'.

Отсюда следует построение:

1) Сделаем инверсию относительно произвольной окружности β с центром *A*. Тогда образами точки *B* и окружности ω будут точка *B*' и окружность ω' соответственно.

2) Проведем касательную *a* к окружности ω' через точку *B*'.

3) Сделаем ту же инверсию еще раз, тогда *a* перейдет в α.

Замечания. 1) Описанное построение не зависит от того, как расположена точка *A* по отношению к ω (внутри или снаружи). Более того, построение не изменится, если вместо окружности ω будет задана прямая, поэтому сделанный чертеж не обязателен (он носит вспомогательный характер). 2) Количество решений зависит только от расположения точки *B*': если она попадет внутрь ω', то решений нет; если она попадет на ω' – то одно решение, а если вне ее – то два. 3) Обратите внимание на этот прием: двукратное применение одной и той же инверсии. Он часто приводит к успеху, так как инверсия является ***инволюцией*** (то есть, преобразование, ей обратное, – она сама).

Инверсия также часто используется в задачах, связанных с поиском ГМТ.

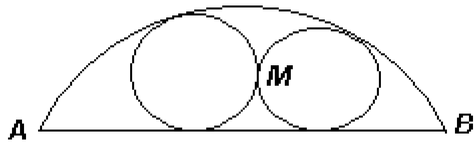
Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Дан равнобедренный треугольник *ABC*. Найдите образ его основания *BC* при инверсии относительно окружности с центром *A* и радиусом *AB*.

2. Постройте окружность, проходящую через заданную точку *A* и касающуюся двух данных окружностей α и β.

3. *Задача Аполлония*. Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей (*рассмотрите любой из случаев расположения данных окружностей*).

4. Постройте окружность, проходящую через заданную точку *A* и ортогональную к двум данным окружностям.



5. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей (см. рисунок). Найдите множество *M* их точек касания.

6. Дана окружность ω и точка *P* внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке *P*. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

7. Никакие три из четырех точек *A*, *B*, *C* и *D* не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников *ABC* и *ABD* равен углу между описанными окружностями треугольников *ACD* и *BCD*.

8. Даны две непересекающиеся окружности (одна лежит вне другой). Постройте окружность инверсии, при которой одна из них переходит в другую. (*Такая окружность называется их срединной окружностью*.)

9. Ортоцентр *H* треугольника *ABC* лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами *A*, *B* и *C*, проходящие через точку *H*, имеют общую касательную.