16.05.17

Инверсия

Использованы материалы из книжки И.Д. Жижилкина «Инверсия» (серия «Библиотека математического просвещения») – М.: МЦНМО, 2009.

Последние два занятия этого учебного года будут посвящены инверсии и ее применению.

Пусть на плоскости задана окружность ω с центром *O* и радиусом *R*.

Определение. Точки *A* и *A*' (отличные от *O*) называются симметричными относительно ω, если *A*' лежит на луче *OA* и $OA \cdot OA' = R^2$ (см. рис. 1).

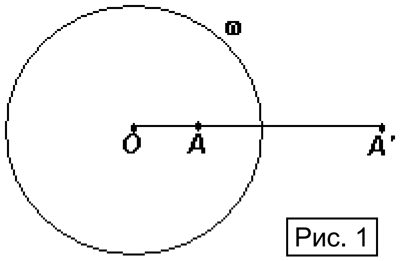

Рис. 1

Следствия из определения.

1. Для каждой точки плоскости, кроме центра *O*, существует единственная точка, симметричная ей относительно окружности ω.

2. Для центра *O* симметричной точки не существует.

3. Каждая точка, лежащая на окружности ω, симметрична сама себе.

4. Если *A* и *A*' – различные симметричные точки, то одна из них лежит внутри окружности ω, а другая – снаружи.

Теперь можно рассмотреть ***отображение плоскости на себя, которое переводит любую точку, кроме центра O, в точку, симметричную ей относительно окружности*** ω. Это преобразование и называется ***инверсией плоскости относительно окружности*** ω.

В дальнейшем, мы будем рассматривать плоскость с «выколотой» точкой *O*. На такой «проколотой плоскости» инверсия полностью и однозначно определена для всех точек. Наглядно можно представить себе инверсию как результат «выворачивания» плоскости через окружность ω.

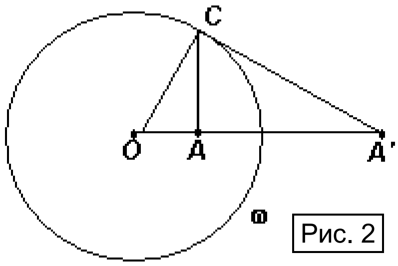

Рис. 2

Вопрос. Почему в определении использован термин «симметрия»?

[Прямая – это окружность бесконечного радиуса]

Это сходство можно дополнить следствиями из определения: ***инверсия – взаимно-однозначное отображение «проколотой плоскости» на себя; преобразование, обратное к ней, – она сама; неподвижные точки инверсии – точки окружности*** ω.

Если рассматривать проективную плоскость, то образом точки O будет бесконечно удаленная прямая.

Построение.

1) Один из способов построения точек, симметричных относительно окружности, вам знаком. Восстановите его по рис. 2.

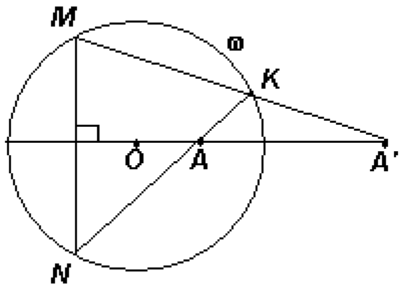

Рис. 3а

Этот способ имеет недостаток – для точек *A* и *A*' построение осуществляется по-разному.

2) Рассмотрим более «универсальный» способ (см. рис. 3а), который не зависит от того, где расположена исходная точка – внутри окружности или вне ее.

Обоснуйте его.

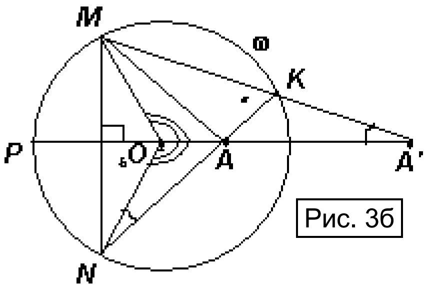

Рис. 3б

[См. рис. 3б. Так как $\angle PON = \angle MKN$, то $\angle AON = \angle AKA'$, значит равны углы *ANO* и *MA'A*. Тогда треугольники *ONA* и *OA'M* подобны (по двум углам). Следовательно, $\frac{ON}{OA'} = \frac{OA}{OM}$, то есть $OA \cdot OA' = R^2$]

Вопрос. Как связаны эти два способа построения?

[Первый способ – «предельный» случай второго]

Напомню, что ***углом между пересекающимися окружностями называется угол между касательными к ним, проведенными в точке их пересечения***.

Очевидно, что этот угол не зависит от выбора точки пересечения. Аналогично определяется угол между пересекающимися прямой и окружностью.

Остальное вы окажете самостоятельно.

Свойства инверсии.

1) ***Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя***.

Это следует из определения. Для доказательства других свойств инверсии нам потребуется следующая лемма.

<u>Основная лемма</u>. ***Пусть A и A', B и B' – две пары точек, симметричных относительно окружности ω с центром O. Тогда $\angle OAB = \angle OB'A'$.'***

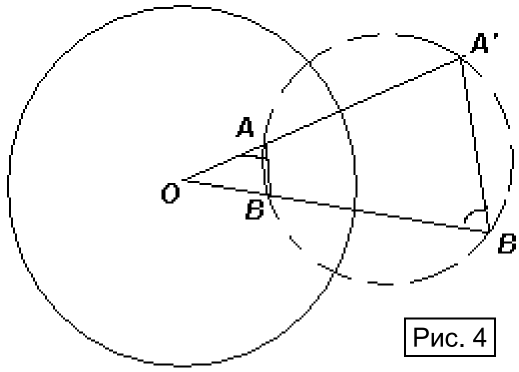

Рис. 4

<u>Доказательство</u>. См. рис. 4. Из определения: $OA \cdot OA' = R^2 = OB \cdot OB'$. Тогда $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$, поэтому треугольники *AOB* и *B'OA'* с общим углом *O* подобны. Следовательно, $\angle OAB = \angle OB'A'$.

Отметим, что рассуждение не изменится, если поменять местами, например, точки *A'* и *B'*, то есть при любом расположении точек ***отрезки AB и A'B' антипараллельны, а их концы лежат на одной окружности***.

Теперь сформулируем и докажем остальные свойства инверсии.

2) ***Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии***.

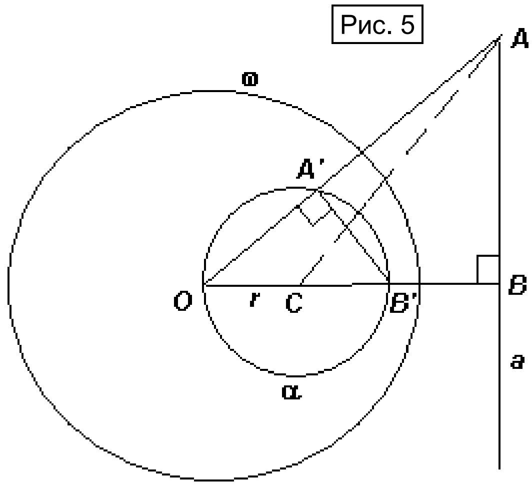

Рис. 5

<u>Доказательство</u>. Пусть прямая *a* не содержит точку *O* (см. рис. 5). Проведем $OB \perp a$ и отметим точку *B'* – образ точки *B*. Тогда, для любой точки *A*, лежащей на прямой *a*, ее образ лежит на луче OA и $\angle O\grave{A}'\hat{A}' = \angle O\hat{A}A = 90^\circ$. Следовательно, ГМТ, являющихся образами точек *A*, будет окружность αс диаметром *OB'*.

Таким образом, ***неподвижные прямые при инверсии – это только прямые, проходящие через ее центр***.

<u>Вопросы</u>. 1) Что является прообразом точки *O*?

[Бесконечно удаленные точки прямой *a*]

2) Как изменится рассуждение при другом взаимном расположении прямой *a* и окружности ω?

[Никак, поскольку во всех случаях сохраняется антипараллельность отрезков *AB* и *A'B'*]

3) Как построить образ прямой *a* для случаев пересечения и касания *a* и ω?

[Так как точки окружности ω являются неподвижными при инверсии, то в случае пересечения в точках *A* и *B* строим окружность, проходящую через точки *O*, *A* и *B*, а в случае касания – окружность с диаметром *OB*, где *B* – точка касания]

4) Чем является прямая *a* для окружностей ω и α? [Радикальной осью]

Докажем это. Для случаев пересечения и касания это очевидно. Рассмотрим случай, изображенный на рис. 5. Пусть *C* – центр окружности α, *r* – ее радиус, тогда достаточно доказать, что для произвольной точки *A* прямой *a* выполняется равенство $OA^2 - R^2 = CA^2 - r^2$. Действительно, $OA^2 - R^2 = OA^2 - OA \cdot OA' = OA(OA - OA') = AO \cdot AA' = CA^2 - r^2$.

5) Что является образом окружности, проходящей через центр инверсии?

[Прямая, не проходящая через центр инверсии, так как инверсия обратна сама себе]

3) ***Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии***.

Доказательство. Рассмотрим инверсию относительно окружности ω и окружность α, не проходящую через центр O инверсии (см. рис. 6). Проведем прямую через центры этих окружностей, пересекающую α в точках B и C. Построим их образы B' и C' при этой инверсии. Пусть A – произвольная точка окружности α, A' – ее образ при инверсии, тогда, используя основную лемму для двух четверок точек A, A', B, B' и A, A', Ñ, Ñ', получим: $\angle B'A'C' = \angle BAC = 90°$. Это означает, что точка A' лежит на окружности α' с диаметром $B'C'$.

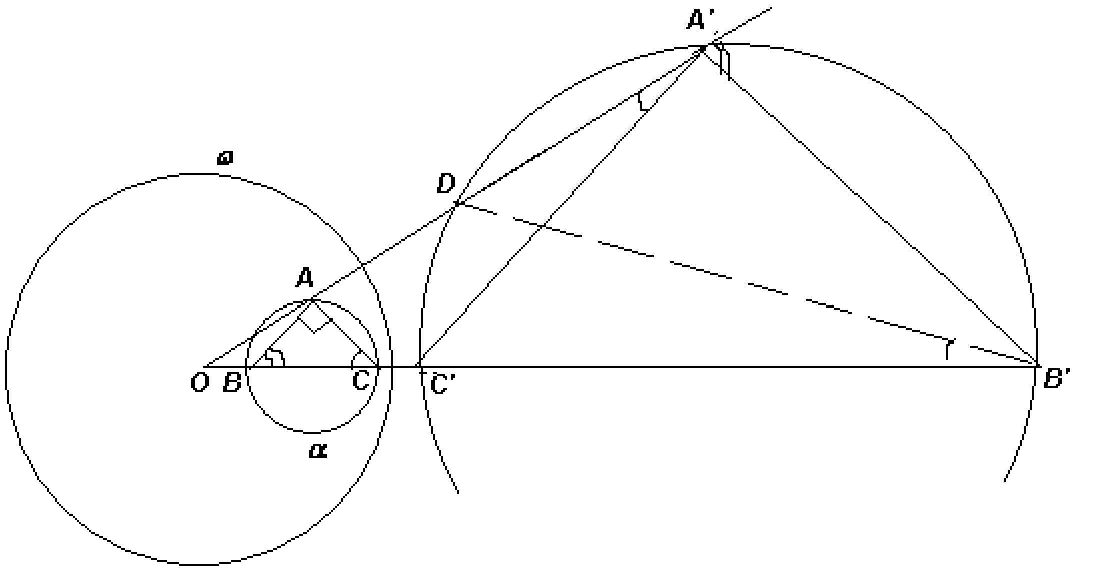

Рис. 6

Остальные случаи расположения окружности α рассматриваются аналогично и мы этим заниматься не будем.

Вопрос. Какие еще преобразования плоскости переводит окружность α в α'?

[Две гомотетии, причем центр одной из них – точка O. Действительно, пусть D – вторая точка пересечения луча OA с окружностью α', тогда $\angle ACB = \angle AA'C' = \angle DB'C'$. Следовательно, $DB' \parallel AC$]

4) ***Инверсия сохраняет углы между пересекающимися окружностями***.

Доказательство. Рассмотрим сначала две прямые a и b, пересекающиеся под углом φ, которые при инверсии относительно ω переходят в пересекающиеся окружности α и β (см. рис. 7). Точка P пересечения прямых переходит в точку P' пересечения окружностей, а вторая точка их пересечения – центр инверсии O.

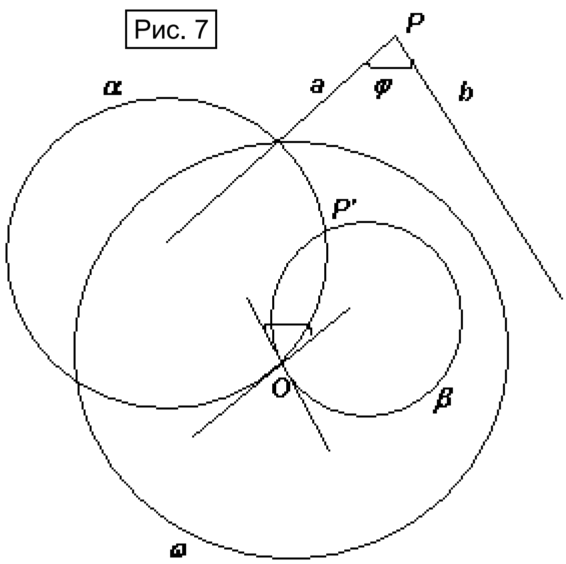

Рис. 7

Так как a – радикальная ось окружностей ω и α, то касательная к α в точке O параллельна прямой a. Аналогично, касательная к β в точке O параллельна прямой b. Следовательно, угол между этими касательными (а, значит, и угол между α и β) равен φ.

Рассмотрим теперь две окружности, пересекающиеся в точке P и касающиеся в ней прямых a и b соответственно. Угол между ними равен φ. Их образами при инверсии являются две окружности, пересекающиеся в точке P' и касающиеся в ней окружностей α

и β соответственно. Поэтому угол между этими образами равен углу между α и β, то есть равен φ.

Понятно, что при инверсии сохраняются также углы между прямой и окружностью, которые определяются аналогично, и углы между прямыми. Преобразования плоскости, сохраняющие углы, называют конформными.

Неподвижные окружности при инверсии.

По основной лемме любые две пары симметричных точек лежат на одной окружности. Поскольку при инверсии эта четвёрка точек в целом остаётся на месте, то окружность α, проходящая через эти точки, также остаётся на месте, то есть переходит сама в себя. Кроме того, окружность инверсии ω является окружностью неподвижных точек. Из свойства сохранения углов при инверсии следует, что в точке пересечения смежные углы между окружностями α и ω равны, значит, эти углы прямые. Поэтому ***такие окружности называют ортогональными***.

Со свойствами ортогональных окружностей вы знакомы по отдельному занятию.

Вопрос. Как распложена прямая, ортогональная данной окружности?

[Проходит через ее центр. Это следует как из определения угла между прямой и окружностью, так и из того, какие прямые являются неподвижными при инверсии]

В силу очевидной симметрии, имеет место следующее утверждение: ***если окружность α переходит в себя при инверсии относительно ω, то окружность ω переходит в себя при инверсии относительно α.***

Полезным дополнением к основной лемме является следующая теорема.

Пусть точки A и A' симметричны относительно окружности ω Тогда любая окружность α, проходящая через эти точки, ортогональна к окружности ω.

Доказательство. Пусть луч с началом в точке O пересекает окружность α в точках B и B' (см. рис. 4). Тогда $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = R^2$, то есть точки B и B' симметричны относительно окружности ω. Значит, α переходит в себя при инверсии относительно ω, то есть α и ω ортогональны.

С применением инверсии к решению задач мы разберемся на следующем занятии.