18.04.17

Вокруг площадей

На этом занятии – разнообразные задачи, связанные с площадями фигур: равновеликость, вычисление площадей, экстремальные значения, неравенства и оценки.

Обратите внимание, что во многих задачах можно эффективно использовать преобразования на плоскости.

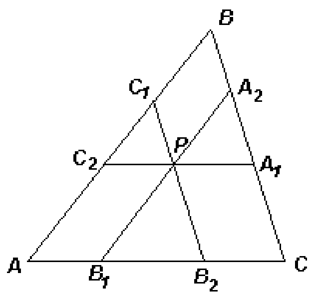
Задачи для самостоятельного решения

1. В квадрате $ABCD$ точки E и F – середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Сравните площади треугольника AGF и четырехугольника $GECF$.

2. Дан четырехугольник $ABCD$ площади 1. Из его внутренней точки O опущены перпендикуляры OK, OL, OM и ON на стороны AB, BC, CD и DA соответственно. Известно, что $AK \geq KB$, $BL \geq LC$, $CM \geq MD$ и $DN \geq NA$. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

3. Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла ABC. Найдите площадь $ABCD$, если BD = 6 см, $\angle ABC = 60°$.

4. Диаметр PQ и перпендикулярная ему хорда MN пересекаются в точке A. Точка C лежит на окружности, а точка B – внутри окружности, причем $BC \parallel PQ$ и $BC = MA$. Из точек A и B опущены перпендикуляры AK и BL на прямую CQ. Докажите, что треугольники ACK и BCL равновелики.



5. Биссектриса AL треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке W. Точки M и N – проекции точки L на AB и AC. Докажите, что четырехугольник $AMWN$ и треугольник ABC равновелики.

6. Через точку P проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC (см. рисунок). Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равновелики.

7. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник площади S. Угол между прямыми AB и CD равен α, а угол между прямыми AD и BC равен β. Докажите неравенство: $\dfrac{AB \cdot CD \sin\alpha + AD \cdot BC \cdot \sin\beta}{2} \leq S \leq \dfrac{AB \cdot CD + AD \cdot BC}{2}$.

8. В треугольнике ABC угол B равен 60°. Точка D внутри треугольника такова, что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC$. а) Найдите наименьшее значение площади треугольника ABC, если $BD = a$; б) В каком случае оно достигается?

9. В треугольнике ABC точка D – середина стороны AB. Можно ли так расположить точки E и F на сторонах AC и BC соответственно, чтобы площадь треугольника DEF оказалась больше суммы площадей треугольников AED и BFD?

10. На плоскости заданы n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$ площади S и произвольная точка P. Повернув точку P на один и тот же заданный угол α относительно каждой из вершин данного многоугольника, получим новый n-угольник. Найдите его площадь.