28.03.17

Соотношения, связанные с биссектрисами треугольника

Использованы материалы В.В. Прасолова, Г.Б. Филипповского, И.Ф. Шарыгина.

Если на некоторых из недавних занятий вы решали ряд задач, используя одну или несколько формул, то на этом занятии все будет не так. Вам будет предложено доказать много формул, связанных с биссектрисами треугольника. Они пригодятся для решения других задач, которые могут вам встретиться, как на последующих занятиях, так и на различных олимпиадах.

Классическим примером полезности одной из формул для вычисления биссектрисы является наиболее простое доказательство знаменитой теоремы Штейнера-Лемуса.

Теорема. Если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный.

У этой теоремы есть много различных доказательств, но наиболее простое следует из формулы $l_c = \dfrac{2ab\cdot\cos 0{,}5\gamma}{a+b}$!

Доказательство. Пусть в треугольнике *ABC*: $l_a = l_c$, *но* a $\neq$ c. Рассмотрим $l_a = \dfrac{2bc\cdot\cos 0{,}5\alpha}{b+c}$ и $l_c = \dfrac{2ab\cdot\cos 0{,}5\gamma}{a+b}$. Без ограничения общности можно считать, что *a* > *c*, тогда $\alpha > \gamma \Leftrightarrow 0{,}5\alpha > 0{,}5\gamma \Rightarrow \cos 0{,}5\alpha < \cos 0{,}5\gamma$, так как эти углы – острые.

Сравним: $\dfrac{bc}{b+c} - \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{b^2(c-a)}{(b+c)(a+b)} < 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{bc}{b+c} < \dfrac{ab}{a+b}$. Таким образом, $l_a < l_c$, что противоречит условию. Следовательно, *a* = *c*, что и требовалось доказать.

Использованную при доказательстве формулу, вы докажете в процессе самостоятельного решения. Понятно, что соотношения, которые вам предложено доказать, связаны между собой. Я их выстроил в определенной логике (но не сложности!), но вы имеете право изменить порядок решения этих задач, выстроив свою логику. Если какие-то предлагаемых соотношений вы уже доказывали в школе, то можете их пропустить, но если вы хотите их использовать при доказательстве других соотношений, то придется объяснить, откуда они берутся.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

В треугольнике ABC: a, b и c – стороны; α, β и γ – противолежащие углы, p – полупериметр; AL = l_a и l'_a – внутренняя и внешняя биссектрисы; W – точка пересечения луча AL с описанной окружностью; O, I и I_a – центры описанной, вписанной и вневписанной окружностей; R, r и r_a – их радиусы.

1. Докажите, что: а) $l_a = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)bc}}{b+c}$; б) $l_a = \dfrac{2bc\cos 0{,}5\alpha}{b+c}$; в) $l_a = \dfrac{2R\sin\beta\sin\gamma}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$.

2. Докажите, что: а) $l'_a = \dfrac{2bc\sin 0{,}5\alpha}{|b-c|}$; б) $\dfrac{1}{al_al'_a} + \dfrac{1}{cl_cl'_c} = \dfrac{1}{bl_bl'_b}$, если *a* < *b* < *c*..

3. Докажите, что $l_c^2 = ab - a'b'$, где *a*’ и *b*’ – отрезки, на которые биссектриса делит противолежащую сторону (*формула Лагранжа*).

4. Докажите, что: а) $AW = \dfrac{b+c}{2\cos 0{,}5\alpha}$; б) $AW = 2R\cos\dfrac{|\beta-\gamma|}{2}$.

5. Докажите, что: а) $\dfrac{AI}{l_a} = \dfrac{b+c}{2p}$; б) $\dfrac{AI}{IL} = \dfrac{AW}{IW} = \dfrac{IW}{LW} = \dfrac{b+c}{a}$.

6. а) Докажите, что $AI\cdot IW = 2Rr$ и $AI_a\cdot I_aW = 2Rr_a$.

б) Получите из этих равенств *формулы Эйлера*: $OI^2 = R^2 - 2Rr$ и $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

в) Пусть d, d_1, d_2 и d_3 – расстояния от центра O окружности, описанной около треугольника, до центров его вписанной и вневписанных окружностей. Докажите, что $R^2 = \dfrac{d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{12}$.

7. Докажите, что: а) $AI \cdot AI_a = bc$; б) $AW^2 = bc + IW^2$.

8. Докажите, что: а) $AI = \sqrt{\dfrac{bc(p-a)}{p}}$; б) $AI = \sqrt{bc - 4Rr}$.

9. Докажите, что $\dfrac{IA^2}{bc} + \dfrac{IB^2}{ac} + \dfrac{IC^2}{ab} = 1$.

10. Продолжения биссектрис треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что: а) $\dfrac{IA \cdot IC}{IB_1} = 2r$; б) $\dfrac{IA_1 \cdot IC_1}{IB} = R$.