Геометрические тождества и неравенства

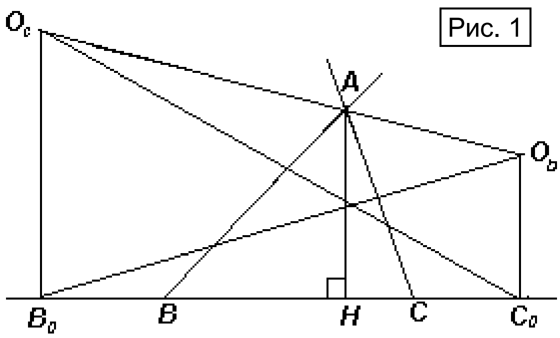
На занятии по теме «Формула Карно» вы увидели, что геометрическое тождество позволяет доказать ряд геометрических неравенств. На сегодняшнем занятии мы обратим внимание еще на несколько геометрических тождеств, с помощью которых можно доказать неравенства, причем, доказав одно из неравенств, можно получать из него другое, и так далее.

Одно из тождеств мы рассмотрим вначале занятия, и на него будет опираться первая половина неравенств, которые будут предложены для самостоятельного решения, а еще два вы докажете сами в процессе решения задач и их можно будет использовать для второй половины.

Пример 1. Докажите, что в любом треугольнике $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

Доказательство. $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow \frac{2S}{h_a} = \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} \Leftrightarrow a = p - b + p - c \Leftrightarrow 2p = a + b + c$.

Каковы а) алгебраическая; б) геометрическая интерпретации доказанного равенства?



[а) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow h_a = \frac{2r_b r_c}{r_b + r_c}$, то есть, высота треугольника, проведенная к одной из сторон, является средним гармоническим радиусов вневписанных окружностей, касающихся двух других сторон треугольника;

б) пусть в треугольнике ABC: O_b и O_c – центры вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB соответственно, B_0 и C_0 – точки касания этих окружностей с прямой BC. Тогда прямые O_bB_0 и O_cC_0 пересекаются на середине высоты AH этого треугольника (см. рис. 1)]

Доказанное соотношение позволяет доказать ряд неравенств (см. задачи 1 – 4 для самостоятельного решения). Не забудьте, что помимо геометрических соображений, можно и нужно использовать алгебру.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Во всех задачах: a, b и c – стороны треугольника, h_a, h_b и h_c – соответствующие им высоты, p и S – его полупериметр и площадь, R, r, r_a, r_b и r_c – радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей соответственно.

1. Докажите, что: а) $h_a \le \sqrt{r_b r_c}$; б) $r_a + r_b + r_c \ \ge\ h_a + h_b + h_c$. В каких случаях достигаются равенства?

2. Докажите, что $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. В каких случаях достигается равенство?

3. Докажите, что $\frac{1}{r} < \frac{2}{h_a} + \frac{2}{h_b} < \frac{2}{r}$.

4. Докажите, что $\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \ge 3$. В каких случаях достигается равенство?

5. Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, где O и H – центр описанной окружности и ортоцентр треугольника соответственно.

6. На стороне AB треугольника ABC построен равносторонний треугольник ABD (точки C и D – в одной полуплоскости относительно прямой AB). Докажите, что $CD^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} - 2S\sqrt{3}$.

7. Докажите, что а) $4S\sqrt{3} \le a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$; б) $a + b + c \le 3R\sqrt{3}$. В каких случаях достигаются равенства?

8. Докажите, что для любого треугольника ABC выполняются неравенства:

а) $abc \le 3R^3\sqrt{3}$; б) $\sin\angle A \cdot \sin\angle B \cdot \sin\angle C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. В каких случаях достигаются равенства?

9. Докажите, что $3r^2\sqrt{3} \le S \le \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. В каких случаях достигаются равенства?

10. Докажите, что: а) $a^2 + b^2 + c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 \ge 4S\sqrt{3}$; б) $5R - r > p\sqrt{3}$;

в) $4R - r_a \ge (p-a)\left(\sqrt{3} + \dfrac{a^2+(b-c)^2}{2S}\right)$.