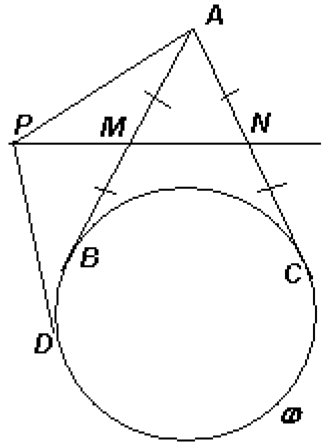
06.12.16

Точка как окружность

Сегодня мы начнем занятие сразу с задачи, у которой есть очень короткое, но неочевидное решение.

Задача. Прямые AB и AC – касательные к окружности ω (B и C – точки касания). Точки M и N – середины отрезков AB и AC. Точка P – произвольная точка прямой MN (см. рис.). Докажите, что $PA = PD$, где PD – касательная к ω.



На одном из прошлых занятиях мы рассматривали понятие степени точки относительно окружностей. В данном случае, мы будем смотреть на точку A как на окружность с центром A радиуса 0. Как тогда определить, что такое степень точки P относительно такой вырожденной окружности? По определению получим, что эта степень равна PA^2.

Решение. Рассмотрим две окружности: ω и точку A (окружность с центром в точке A и нулевым радиусом). Тогда MN _– радикальная ось этих двух окружностей. Следовательно, точка P лежит на радикальной оси окружности ω и точки A. Тогда равны степени точки P относительно этих окружностей, то есть $PA^2 = PD^2$, откуда $PA = PD$, что и требовалось.

Упражнения. 1) Что является радикальной осью:
а) двух точек; б) окружности и точки вне ее; в) окружности и точки на окружности?
2) Что такое радикальный центр трех точек, не лежащих на одной прямой?

Удивительным образом оказывается, что эти простые факты полезны для решения довольно трудных задач. Для некоторых задач, которые вам будут предложены, специально указаны источники, так как некоторые из них предлагались на весьма серьезных олимпиадах.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны окружность ω и фиксированная точка A вне окружности. Через точку A проводятся окружности S, которые касаются окружности ω в точке B. Касательные, проведенные в точках A и B к окружности S, пересекаются в точке M. Докажите, что все такие точки M лежат на одной прямой.

2. Из точки A, лежащей вне окружности ω, проведены касательные AB и AC (B и C – точки касания). Точки E и F – середины отрезков AB и AC соответственно. На прямой EF выбрана произвольная точка D, из которой к ω проводятся касательные DP и DQ (P и Q – точки касания). Прямая PQ пересекает прямую EF в точке M. Докажите, что $\angle DAM = 90°$.

3. Вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB треугольника ABC в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Точки A_1 и C_1 – середины отрезков B_0C_0 и A_0B_0 соответственно. Докажите, что четырехугольник AA_1C_1C – вписанный.

4. В треугольнике ABC проведена вписанная окружность с центром I, которая касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0 соответственно.
а) (*Кубок имени А.Н. Колмогорова*) Прямая BI пересекает A_0C_0 в точке K. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BKB_0 лежит на прямой AC.
б) (*Санкт-Петербургская олимпиада 2002, отборочный тур*) Прямая, перпендикулярная BB_0 и проходящая через B_0, пересекает A_0C_0 в точке B_1. Докажите, что середина отрезка BB_1 лежит на прямой AC.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0 соответственно. Прямая a проходит через середины отрезков AB_0 и AC_0. Аналогично, определяются прямые b и c. Точки попарного пересечения прямых a, b и c образуют треугольник $A'B'C'$. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают.

6. В остроугольном треугольнике ABC угол C больше угла A. M – середина стороны AC. A_1 и C_1 – основания высот, проведенных из вершин A и C соответственно. A_0 и C_0 –

середины отрезков MA_1 и MC_1. Прямая A_0C_0 пересекает прямую, проходящую через B параллельно AC, в точке T. Докажите, что $TB = TM$.

7. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку I перпендикулярно прямой BI, пересекает прямую AC в точке B_1. Аналогично определяются точки A_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

8. (*Всероссийская олимпиада 2011, 10.4*) Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM или ACM равен 2.

9. (*Турнир городов, 2013*) В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z соответственно. На плоскости отметили произвольную точку K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY и KZ пересекают прямые BC, CA и AB в точках X_1, Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой.

10. (*IMO Shortlist, 2007*) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках Z и Y соответственно. Прямые BY и CZ пересекаются в точке G. Точки R и S выбираются так, что четырехугольники $BCYR$ и $BCSZ$ – параллелограммы. Докажите, что $GR = GS$.