Степень точки относительно окружности. Радикальная ось двух окружностей и радикальный центр трех окружностей

Вспомним некоторые факты школьной программы. Пусть дана окружность ω и точка P. Прямая, проходящая через точку P, пересекает окружность в точках A и B (см. рис. 1 а, б). Тогда величина $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой (*теорема о пересечении хорд окружности и теорема о произведении отрезка секущей и ее внешней части*).

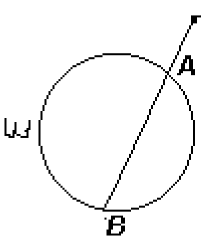

Рис. 1а

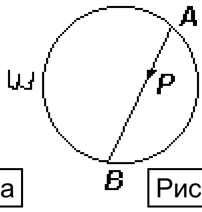

Рис. 1б

Эта величина, взятая со знаком «+», если точка P лежит вне окружности, и со знаком «–», если P – внутри окружности, называется ***степенью точки P относительно окружности*** ω. Если точка P лежит на окружности, то ее степень относительно окружности равна 0.

Упражнения.

1. Пусть степень точки P относительно окружности ω положительна. Дайте ее геометрическую интерпретацию.

[Степень точки P равна квадрату отрезка касательной, проведенной к окружности из этой точки]

2. Какие соотношения в прямоугольном треугольнике можно считать следствиями из теоремы о степени точки?

[Соотношения о средних пропорциональных; *изобразить*]

3. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о степени точки.

[Если $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности]

Это утверждение является еще одним признаком вписанного четырехугольника.

4. Пусть O – центр окружности ω, R – ее радиус. Докажите, что степень точки P относительно окружности ω равна $d^2 - R^2$, где $d = PO$.

[Пусть прямая PO пересекает окружность в точках C и D (см. рис. 1 в, г). Тогда $PA \cdot PB = PC \cdot PD = \begin{cases} (d-R)(d+R) \\ -(R-d)(R+d) \end{cases} = d^2 - R^2$ (*На рис. 1в – $d > R$, на рис. 1г – $d < R$*)]

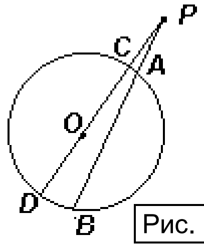

Рис. 1в

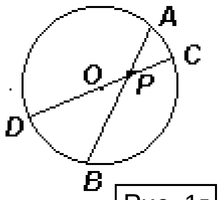

Рис. 1г

5. Рассмотрим две произвольные неконцентрические окружности (O; R) и (O'; R') (см. рис. 2). Найдите ГМТ, у которых степени относительно этих окружностей равны.

[<u>Первый способ</u>. Точка P принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда $PO^2 - R^2 = PO'^2 - R'^2 \Leftrightarrow PO^2 - PO'^2 = R^2 - R'^2 = r^2$ ($R > R'$). Этим ГМТ является ***прямая, перпендикулярная OO'***.

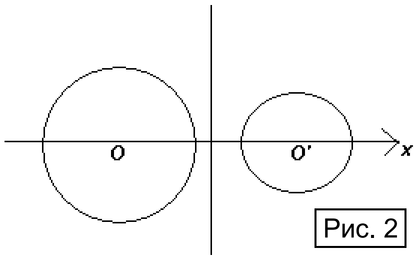

Рис. 2

<u>Второй способ</u>. Введем декартову систему координат так, что прямая OO' совпадает с осью абсцисс. Пусть $O(a;\ 0)$, $O'(b;\ 0)$, $P(x;\ y)$. Тогда $(x - a)^2 + y^2 - (x - b)^2 - y^2 = r^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{r^2 - a^2 + b^2}{2(b-a)}$.]

Такая прямая называется ***радикальной осью данных окружностей***.

6. А) Объясните, почему не существует радикальной оси двух концентрических окружностей.

Б) Может ли радикальная ось двух окружностей, не имеющих общих точек, пересекать одну из них? Почему?

В) Докажите, что радикальная ось пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

Г) Докажите, что радикальная ось касающихся окружностей является их общей касательной.

[А) Перебор трех возможных случаев показывает, что нет точек с одинаковой степенью относительно таких окружностей. Б) Нет, так как точка пересечения этой оси с окружностью имеет нулевую степень относительно этой окружности, а относительно другой окружности ее степень отлична от нуля. В) Прямая определяется двумя точками, имеющими нулевую степень относительно каждой из окружностей. Г) Пусть это не так, тогда найдется точка на радикальной оси, которая вне одной окружности и внутри другой, то есть ее степени относительно окружностей имеют разные знаки.

Другой возможный способ обоснования пункта А): при $a = b$ выводимое уравнение не будет иметь решений. Другие пункты также можно объяснить, исходя из уравнения, но это более громоздко.]

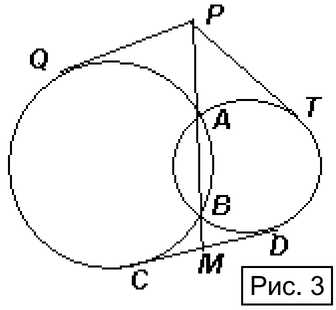

Рис. 3

7. Две окружности пересекаются в точках A и B (см. рис. 3).

А) Точка P лежит на прямой AB вне отрезка AB. Докажите, что длины касательных, проведенных из точки P к обеим окружностям, равны.

Б) CD – общая внешняя касательная окружностей. Докажите, что прямая AB делит отрезок CD пополам.

[А) $PQ^2 = PA\cdot PB = PT^2$; Б) $MC^2 = MA\cdot MB = MD^2$]

8. Рассмотрим три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три прямые, являющиеся радикальными осями каждой пары данных окружностей пересекаются в одной точке.

[Пусть прямая a – радикальная ось первых двух окружностей, а прямая b – радикальная ось второй и третьей окружности. Пусть P – точка пересечения = a и b, тогда ее степень по отношению к первой и третьей окружностям одинакова, то есть точка P лежит на радикальной оси c первой и третьей окружности. Следовательно, прямые a, b и c пересекаются в точке P.]

Эта точка называется ***радикальным центром трех окружностей***.

Задачи для самостоятельного решения

1. а) Докажите, что середины отрезков всех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

б) В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая – в точках C и D соответственно. Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды.

2. (*Лемма о трех хордах*). Пусть даны три окружности, которые пересекаются попарно. Докажите, что прямые, содержащие три общие хорды пар этих окружностей, либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

3. Одна окружность проходит через вершины A и C прямоугольника $ABCD$, а другая – через вершины B и D. Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника.

4. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C – прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC.

5. На окружности S с диаметром AB отмечена точка C, из которой опущен перпендикуляр CH на прямую AB. Проведена окружность S_1 с центром C и радиусом CH. Докажите, что общая хорда этих окружностей делит отрезок CH пополам.

6. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка A'. Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AB в точке M, а серединный перпендикуляр к отрезку $A'C$ пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что точка, симметричная точке A' относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. Четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB, а другая – хорду CD, отметим их точку касания X. Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности.

8. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а продолжения сторон BC и AD – в точке E. Докажите, что:
а) окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, причем на ней лежат ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF и BCF;
б) эта радикальная ось перпендикулярна прямой, проходящей через середины AC и BD.
9. В остроугольном треугольнике ABC: O – центр описанной окружности, A_1, B_1 и C_1 – основания высот, проведенных из вершин A, B и C соответственно. На прямых OA_1, OB_1 и OC_1 отмечены такие точки A', B' и C' соответственно, что четырёхугольники $AOBC'$, $BOCA'$ и $COAB'$ – вписанные. Докажите, что:
а) прямые OA, OB и OC – касательные к описанным окружностям треугольников AB_1B', BC_1C' и CA_1A' соответственно;
б) окружности, описанные около треугольников AA_1A', BB_1B' и CC_1C', имеют общую точку.