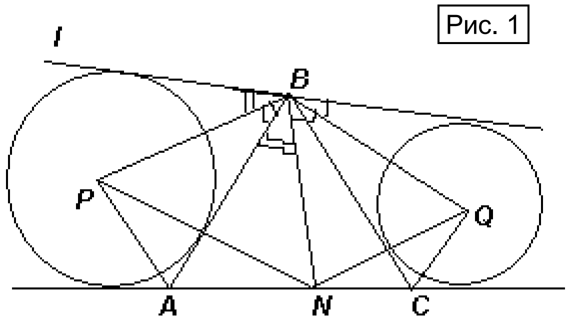
15.11.16

Равносторонний треугольник и две окружности

Основу этого занятия составляет цепочка задач, связанная с одной и той же геометрической конфигурацией.

Через вершину B равностороннего треугольника ABC проведена прямая l, не пересекающая сторону AC. Вне треугольника проведены две окружности с центрами P и Q: одна из них касается стороны BC, прямых l и AC, а другая касается стороны BA, прямых l и AC (см. рис. 1).

Основной факт, который можно будет использовать при решении задач: ***треугольник PBQ – равнобедренный***. Докажем это.



Доказательство. Проведем луч BN, симметричный лучу BP относительно прямой AB, тогда $\angle NBA = \angle PBA$ (точка N лежит на отрезке AC). Так как AP – биссектриса внешнего угла треугольника ABC, который равен $120°$, то $\angle BAP = 60° = \angle BAN$. Значит, треугольники BAP и BAN равны (по стороне и прилежащим углам), поэтому $BP = BN$.

Заметим теперь, что сумма углов, образованных прямой l со сторонами AB и BC (вне данного треугольника) равна $120°$, значит, сумма их половин равна $60°$. Следовательно, $\angle NBC = \angle QBC$. Тогда, рассуждая аналогично вышеизложенному, получим равенство треугольников BCN и BCQ, откуда $BQ = BN$. Таким образом, $BP = BQ$, то есть треугольник BPQ – равнобедренный.

В итоге, точка Q является образом точки P при повороте на 120°, а в процессе решения этот поворот представлен в виде композиции двух осевых симметрий.

Другие свойства этой конфигурации вы получите в процессе самостоятельного решения задач. Рекомендуется их решать примерно в той последовательности, которая предложена.

Советую также обратить внимание на еще одну симметрию: прямые l и AC симметричны относительно прямой PQ – линии центров данных окружностей.

К рассмотренной конфигурации относятся первые 7 задач. Те из вас, кто с ними справятся, могут решить еще три задачи, также связанные с равносторонним треугольником и окружностями.

Задачи для самостоятельного решения

Через вершину B равностороннего треугольника ABC проведена прямая l, не пересекающая сторону AC. Вне треугольника проведены две окружности: окружность с центром P касается стороны BA в точке A_1, а также прямых l и AC, а окружность с центром Q касается стороны BC в точке C_1, а также прямых l и AC. Докажите, что:

1) Прямые PA_1, QC_1 и AC пересекаются в одной точке.

2) Описанная окружность треугольника A_1BC_1 проходит через середину стороны AC.

3) Центр окружности, описанной около треугольника PBQ, лежит на стороне AC.

4) Пусть N – точка пересечения прямых PA_1 и QC_1, O – центр окружности, описанной около треугольника PBQ. Тогда точки P, Q, N и O лежат на одной окружности.

5) Ортоцентр треугольника A_1BC_1 лежит на прямой PQ.

6) Пусть прямая PQ пересекает AB и BC в точках A' и C' соответственно. Тогда центр окружности, описанной около треугольника $A'BC'$, лежит на отрезке BN.

7) Пусть описанная окружность треугольника PBQ пересекает прямую l в точке T. Тогда точка T лежит на окружности, описанной около треугольника $A'BC'$.

---

8. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, отмечена точка P. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

9. Дан равносторонний треугольник ABC с центром O. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает описанную окружность треугольника AOB в точках D и E. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BD и BE лежат на одной окружности.

10. Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через три заданные точки A, B и C (*на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек*).