08.11.16

Автомедианные треугольники

Вспомним определение среднего квадратичного двух чисел: ***число z называется средним квадратичным положительных чисел x и y, если*** $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}}$.

<u>Определение</u>. Треугольник, одна из сторон которого является ***средним квадратичным*** двух других, называется ***автомедианным***.

Очевидно, что автомедианным является, например равносторонний треугольник.

Прежде, чем станет понятен смысл такого названия треугольника, условимся для всех задач этого занятия: стандартно обозначать длины сторон треугольника *ABC* (*BC* = *a*, *AC* = *b*, *AB* = *c*); m_a, m_b и $m_\text{ñ}$ – медианы треугольника, проведенные к соответствующим сторонам; *M* – точка пересечения медиан, *O* – центр описанной окружности. Если *ABC* – ***автомедианный*** треугольник, то $b = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2}{2}}$ ($a \le b \le c$).

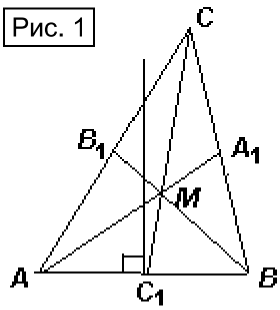
1) Вспомните формулу для вычисления медианы треугольника по его сторонам. [$m_a = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$].

2) Докажите, что ***большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана, и наоборот, большей медиане соответствует меньшая сторона***.

<u>Первый способ</u>. Рассмотрим разность квадратов двух медиан: $m_a^2 - m_b^2$ = $\dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \dfrac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$ = $\dfrac{3(b^2 - a^2)}{4}$. Следовательно, $\boldsymbol{b > a \Leftrightarrow m_b < m_a}$.

<u>Второй способ</u>. Пусть *M* – точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника *ABC* (см. рис. 1). Проведем серединный перпендикуляр к стороне *AB*, который разобьет плоскость на две полуплоскости. Так как, по условию, *BC* = *a* < *BA* = *c*, то медиана CC_1 лежит в одной полуплоскости со стороной *BC*, значит, точка *M* лежит в той же полуплоскости. Следовательно, *BM* < *AM*, поэтому $AA_1 > BB_1$, то есть $m_a > m_b$. В обратную сторону – аналогично.

Рис. 1



3) Теперь рассмотрим задачу, решив которую, мы сможем сформулировать основной признак автомедианного треугольника.

Задача. Найдите зависимость между сторонами треугольника, если треугольник, составленный из его медиан, ему подобен.

Решение. Условие задачи равносильно выполнению равенства $\dfrac{m_a}{c} = \dfrac{m_b}{b} = \dfrac{m_c}{a}$. Его следствием является равенство $\dfrac{m_a^2}{c^2} = \dfrac{m_c^2}{a^2}$, подставив в которое выражения для медиан и избавившись от знаменателя, получим: $a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ = $c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)$ $\Leftrightarrow$ $2b^2(a^2 - c^2) = a^4 - c^4$ $\Leftrightarrow$ *a* = *c* или $b = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2}{2}}$. В обоих случаях должно еще выполняться равенство $\dfrac{m_a^2}{c^2} = \dfrac{m_b^2}{b^2}$.

В первом случае получим, что $\dfrac{m_a^2}{c^2} = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4c^2} = \dfrac{a^2 + 2b^2}{4a^2}$, а $\dfrac{m_b^2}{b^2} = \dfrac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4b^2} = \dfrac{4a^2 - b^2}{4b^2}$. Приравнивая и упрощая, получим: $4a^4 - a^2b^2 = a^2b^2 + 2b^4$ $\Leftrightarrow$ $(a^4 - b^4) + (a^4 - a^2b^2) = 0$ $\Leftrightarrow$ $(a^2 - b^2)(2a^2 + b^2) = 0$, значит *a* = *b*, то есть искомый треугольник – равносторонний.

Во втором случае: $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4c^2} = \frac{a^2 + c^2 + 2c^2 - a^2}{4c^2} = \frac{3}{4}$ и $\frac{m_b^2}{b^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4b^2} = \frac{4b^2 - b^2}{4b^2} = \frac{3}{4}$, то есть требуемое равенство выполняется без дополнительных условий.

Таким образом, сформулированное в задаче условие является ***основным признаком автомедианного треугольника***. Проведя аналогичные выкладки, несложно проверить, что если $b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$, то треугольник со сторонами *a*, *b* и *c* – автомедианный, то есть сформулированное условие можно считать и ***основным свойством автомедианного треугольника***.

В заключение отметим важное следствие полученных утверждений, возникшее по ходу выкладок: ***в автомедианном треугольнике коэффициент подобия «медианного» треугольника и самого треугольника равен*** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что средний по величине угол автомедианного треугольника не превосходит 60°.

2. Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда:
а) медианы треугольника обратно пропорциональны его высотам;
б) одна из его медиан является средним квадратичным двух других;
в) вершина, середины двух сторон, сходящихся в этой вершине, и точка пересечения медиан лежат на одной окружности.

3. Пусть медиана *BB*’ треугольника *ABC* пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке *T*. Докажите, что *ABC* – автомедианный тогда и только тогда, когда:
а) *M* – середина *BT*; б) точки *M* и *T* симметричны относительно точки *B*’.

4. Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда середина отрезка *BM* лежит на окружности девяти точек треугольника *ABC*.

5. а) Докажите, что для любого треугольника выполняется равенство: $OH^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, где *O* и *H* – центр его описанной окружности и ортоцентр соответственно. б) Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда его прямая Эйлера перпендикулярна одной из медиан.

6. Длина медианы, проведенной из вершины *B* треугольника *ABC* равна *m*. Оказалось, что основание этой медианы, середины двух других медиан и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Найдите *AC*.

7. В треугольнике *ABC* точки *A*’ и *C*’ – середины сторон *BC* и *AB* соответственно. Точки *K* и *L* – основания перпендикуляров, опущенных из *A*’ на *AB* и *AC*, а точки *M* и *N* – основания перпендикуляров, опущенных из *C*’ на *BC* и *AC*. Докажите, что *KL* = *MN* тогда и только тогда, когда треугольник *ABC* равнобедренный (с основанием *AC*) или автомедианный (со средней по длине стороной *AC*).

8. Две окружности пересекаются в точках *P* и *Q*, *AB* – их общая касательная (*A* и *B* – точки касания). Оказалось, что *Q* – точка пересечения медиан треугольника *ABP*. Докажите, что отрезок *AB* является средним квадратичным отрезков *AP* и *BP*.