

### Разностные треугольники

**Определение.** Треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, называется **разностным**.

Такие треугольники обладают рядом интересных свойств, которые мы и рассмотрим. Пусть в треугольнике  $ABC$ :  $b = \frac{a+c}{2}$  ( $a \leq b \leq c$ ),  $I$  – центр вписанной окружности,  $W$  – точка пересечения луча  $BI$  и окружности, описанной около треугольника  $ABC$  (см. рис. 1). Тогда: 1)  $BI = IW$ ; 2)  $r = \frac{1}{3} h_b$ .

**Доказательство.** 1) Опустим из точки  $I$  перпендикуляр  $IN$  на сторону  $BC$ , а из точки  $W$  – перпендикуляр  $WK$  на сторону  $AC$ . Так как  $N$  – точка касания стороны треугольника и вписанной окружности, то  $BN = p - b = \frac{1}{2} b = AK$ . Кроме того,  $\angle CBW = \angle CAW$ . Тогда  $\triangle BIN = \triangle AWK$  (по катету и острому углу), следовательно,  $BI = AW$ . По теореме «трилистника»  $WA = WI$ , то есть  $BI = IW$ ; что и требовалось.

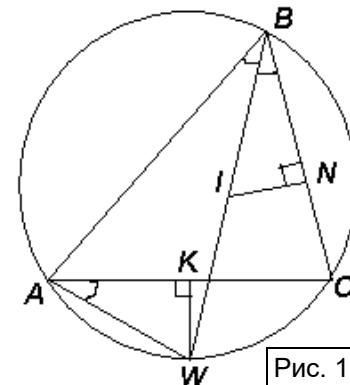


Рис. 1

$$2) r = \frac{S}{p} = \frac{bh_b}{a+b+c} = \frac{bh_b}{3b} = \frac{1}{3} h_b$$

Являются ли доказанные утверждения признаками **разностного** треугольника?

**[Да; 1) равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу;**

$$2) b = \frac{2S}{h_b} = \frac{(a+b+c)r}{h_b} = \frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}]$$

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

- Докажите, что треугольник  $ABC$  является разностным тогда и только тогда, когда:
  - прямая  $IM$ , где  $M$  – центроид (точка пересечения медиан) треугольника, параллельна стороне  $AC$ ;
  - сторона  $AC$  пересекает отрезок  $IW$  в его середине;
  - середина стороны  $AC$  и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно точки касания этой же стороны и вписанной окружности;
  - высота треугольника равна радиусу внеписанной окружности, касающейся той стороны, к которой проведена высота;
  - точка касания внеписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведенной к этой же стороне.
- Среди прямоугольных треугольников укажите все, являющиеся разностными, и докажите, что разностью арифметической прогрессии ( $a$ ;  $b$ ;  $c$ ) является радиус  $r$  вписанной в этот треугольник окружности.
- Докажите, что в разностном треугольнике  $ABC$ : а) вершина  $B$ , центры  $O$  и  $I$  описанной и вписанной окружностей и середины сторон  $AB$  и  $BC$  лежат на одной окружности; б) прямая  $IM$ , где  $M$  – центроид треугольника, является касательной к этой окружности.
- В египетском треугольнике  $ABC$  (угол  $C$  – прямой,  $BC$  – меньший катет) найдите угол  $BOI$  (точки  $O$  и  $I$  – центры описанной и вписанной окружностей соответственно).
- Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите расстояние от центроида до центра вписанной окружности.
- Докажите, что в разностном треугольнике  $ABC$  центр  $I$  вписанной окружности является центром окружности, описанной около треугольника  $A'LC'$ , где  $L$  – основание биссектрисы, проведенной из вершины  $B$ ,  $A'$  и  $C'$  – середины сторон  $BC$  и  $AB$  соответственно.

7. В разностном треугольнике  $ABC$  продолжение биссектрисы  $BL$  пересекает описанную окружность в точке  $W$ ,  $T$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $W$  на сторону  $AB$ . Докажите, что: а)  $BT = AC$ ; б)  $AL = \frac{1}{2} AB$ .

8. Докажите, что треугольник  $ABC$  является разностным тогда и только тогда, когда:  
а) сумма расстояний от произвольной точки его биссектрисы до сторон равна одной из высот; б) он не является равнобедренным и центр его вписанной окружности равноудален от середин двух сторон.

9. Докажите, что стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда котангенсы его половинных углов составляют арифметическую прогрессию.

10. Докажите, что в разностном треугольнике средний по величине угол не больше, чем  $60^\circ$ .