27.09.16

Движения на плоскости

Сегодня мы рассмотрим геометрические задачи, которые эффективно решаются с помощью движений на плоскости.

Какие преобразования называются движениями?

[**Для любых двух точек расстояния между ними равно расстоянию между их образами**]

Перечислите виды простейших движений.

[**Центральная и осевая симметрии, параллельный перенос и поворот**]

Отметим, что **движениями являются** также **обратные к ним преобразования**, а также любая **их композиция**.

Конечно, при решении многих задач вы уже применяли движения, даже не формулируя это явно, так как часть типовых дополнительных построений по сути является применением движений. Например, удвоение медианы есть центральная симметрия относительно середины стороны, проведение прямой, параллельной стороне или параллельной диагонали трапеции – параллельный перенос, и так далее, а осевая симметрия неоднократно возникала при решении задач на кратчайшие маршруты.

Рассмотрим два простых примера, которые позволят нам выявить некоторые тонкости.

Пример 1. На сторонах AB и BC ромба $ABCD$ с тупым углом ABC, равным 120°, выбраны точки E и F соответственно так, что отрезки AE и BF равны. Найдите угол FDE.

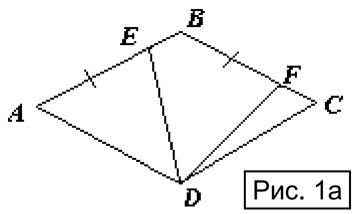

Рис. 1а

Решение. Рассмотрим поворот с центром D на угол 60° против часовой стрелки (см. рис. 1а). При таком повороте образами вершины C и B являются вершины B и A соответственно (*треугольники CBD и ABD – равносторонние*). Следовательно, образом стороны CB является сторона BA. Так как $BF = AE$, то образом точки F является точка E. Значит, $\angle FDE = 60°$.

Попутно мы доказали, что треугольник DEF – равносторонний (*почему*?). Тогда возникает идея рассмотреть обратную задачу.

Пример 2. На сторонах AB и BC ромба $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно так, что отрезки AE и BF равны. Оказалось, что треугольник DEF – равносторонний. Найдите углы ромба.

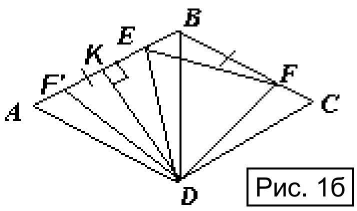

Рис. 1б

Поворот, к сожалению, не помогает и надо искать что-то другое ... .

Решение 1. На стороне AB отложим отрезок AF' так, чтобы $AF' = CF$, тогда $\Delta DAF' = \Delta DCF$ (I признак), следовательно, $DF' = DF = DE$, то есть $\Delta DEF'$ – равнобедренный (см. рис. 1б). Проведем перпендикуляр DK к стороне AB, тогда K – середина отрезка EF'. Кроме того, $AF' = CF = BE$, значит, K – середина стороны AB. Следовательно, ΔABD – равносторонний, то есть **углы ромба – 60° и 120°**.

А теперь убедимся в том, что это все-таки движение.

Решение 2. При симметрии относительно прямой BD образом вершины C является вершина A, а образом стороны CB – сторона AB (см. рис. 1б). Тогда образом точки F является точка F' на стороне AB. Значит, $DF' = DF = DE$. Проведем перпендикуляр DK к стороне AB, тогда образом точки F' при симметрии относительно DK является точка E. Таким образом, композиция симметрий относительно прямых BD и DK переводит точку F в точку E. Но композиция таких симметрий является поворотом с центром D на удвоенный угол между осями (*почему*?). Следовательно, $\angle BDA = 2\angle BDK$. Таким образом, ΔABD – равносторонний, то есть **углы ромба – 60° и 120°**.

В каком случае полученный ответ будет все-таки неверен? [**Если точки *E* и *F* – середины сторон ромба**]. Поэтому условие задачи надо скорректировать, оговорив этот случай.

Отметим, что ***в геометрических рассуждениях равенство треугольников можно всегда заменить конкретным видом движения или их композицией, и наоборот***!

Почему в примере 1 образом точки F является точка, лежащая на AB?

[**Движение сохраняет прямолинейность**]

Важно также понимать и более общий факт, который справедлив не только для движений, но и для любых взаимно однозначных соответствий:: **образ пересечения равен пересечению образов** (*пояснить*).

Некоторые из задач, которые вам будут предложены, можно решить и без помощи движений, но применение движений сильно упрощает как само решение, так и его поиски.

Задачи для самостоятельного решения

1. Внутри прямоугольника $ABCD$ выбрана произвольная точка M. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, стороны которого равны соответственно отрезкам AM, BM, CM и DM.

2. В треугольник вписана окружность и проведены касательные, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что противолежащие стороны образовавшегося шестиугольника попарно равны, а три большие диагонали пересекаются в одной точке.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$, длина стороны которого равна a, отмечены точки M и N соответственно так, что площадь треугольника AMN равна сумме площадей треугольников ABM и ADN. Найдите угол MAN и длину высоты треугольника AMN, проведенной из вершины A.

4. Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке.

5. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На сторонах AB и BC построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Докажите, что продолжение медианы BM является высотой треугольника DBG.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке E. Докажите, что если трапеция описанная, то угол AED – тупой.

7. Постройте выпуклый четырехугольник по четырем сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противолежащих сторон.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны стороны AB, BC и CD, M – середина стороны AD. Известно, что угол BMC – прямой. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

9. В треугольнике ABC длины сторон попарно различны, A_1, B_1 и C_1 – точки касания его вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно, A_2, B_2 и C_2 – точки, симметричные точкам A_1, B_1 и C_1 относительно биссектрис соответствующих углов треугольника ABC. Докажите, что $A_2C_2 \parallel AC$.

10. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. Прямые, проведенные через произвольную точку P плоскости треугольника перпендикулярно CA, CM и CB, пересекают прямую CH в точках A', M' и B' соответственно. Докажите, что $A'M' = B'M'$.