Центроид системы точек

На этом занятии мы займемся векторами. Начнем с базовых сведений. Пусть задано n векторов: $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, ..., $\overline{a_n}$. Какое условие равносильно тому, что из них можно составить контур n-угольника?

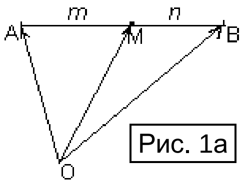

Рис. 1а

[$\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{a_k} = \overline{0}$, *изобразить и пояснить*]

Пусть задан отрезок AB и точка $M \in AB$ | $AM : MB = m : n$ (см. рис. 1а). Рассмотрим произвольную точку O на плоскости и выразим $\overline{OM}$ через $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + x\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{m}{m+n}\left(\overline{OB} - \overline{OA}\right) = \frac{n}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}$.

Рассмотрим теперь еще одно важное понятие.

<u>Определение</u>. ***Центроидом системы точек $A_1, A_2, ..., A_n$ называется такая точка M, что*** $\overline{MA_1} + \overline{MA_2} + ... + \overline{MA_n} = \overline{0}$ *(1)*.

Можно сформулировать равносильное утверждение: ***точка M является центроидом системы точек $A_1, A_2, ..., A_n$ тогда и только тогда, когда для любой точки O выполняется равенство*** $\overline{OM} = \frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + ... + \overline{OA_n}}{n}$ *(2)*.

Докажем эту равносильность.

Доказательство. 1) Пусть выполняется равенство (1). Для каждого k заменим: $\overline{MA_k} = \overline{OM} - \overline{OA_k}$, после чего приведем подобные слагаемые и разделим обе части на n. Получим равенство (2).

2) Пусть выполняется равенство (2), тогда можно использовать для замены то же самое равенство, выразив из него $\overline{OA_k}$, либо выбрать точку $O \equiv M$, и получить равенство (1).

Условимся: под ***центроидом многоугольника понимать центроид системы, состоящей из его вершин***.

Для каких многоугольников вы сходу можете указать центроиды? Обоснуйте.

[1) Параллелограмм и вообще, любая центрально симметричная фигура; 2) Треугольник].

1) ***Центроидом центрально симметричной фигуры является ее центр симметрии***, так как векторы вида $\overline{OA_k}$, где O – центр симметрии, попарно симметричны относительно O, поэтому их сумма равна $\overline{0}$.

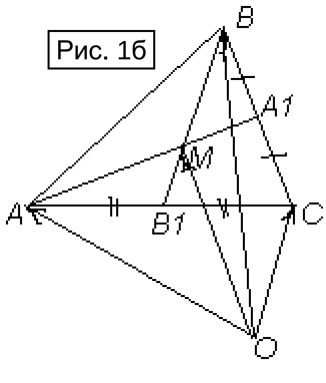

Рис. 1б

2) ***Центроидом треугольника является точка пересечения его медиан***. Действительно, пусть M – точка пересечения медиан AA_1 и BB_1 и треугольника ABC (см. рис. 1б). Тогда $M \in AA_1$ и $AM : MA_1 = 2 : 1$, значит, $\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OA_1}$; так как A_1 – середина BC, то $\overline{OA_1} = \frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OC}$. Значит, $\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OC}\right) = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC}$.

Докажем ***единственность центроида любой системы точек***.

Доказательство. Пусть K – еще один центроид системы точек $A_1, A_2, ..., A_n$, тогда $\overline{OK} = \frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + ... + \overline{OA_n}}{n}$. Вычитая это равенство из равенства (2), получим, что $\overline{OM} - \overline{OK} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{KM} = \overline{0}$, то есть точки K и M совпадают.

Используя, что модуль суммы векторов не превосходит суммы их модулей, можно получить также важное ***следствие равенства (2)***: $\left|\overline{OM}\right| = \frac{\left|\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + ... + \overline{OA_n}\right|}{n} \le$.

$\dfrac{|\overline{OA_1}|+|\overline{OA_2}|+...+|\overline{OA_n}|}{n}$, причем ***равенство достигается тогда и только тогда, когда все векторы $\overline{OA_k}$ одинаково направлены***.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Докажите, что точка пересечения средних линий четырехугольника (отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон) является серединой отрезка, соединяющего середины его диагоналей.

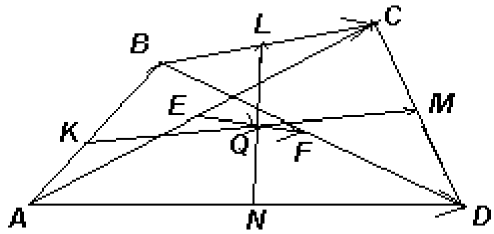

Рис. 2

Доказательство. Пусть *K*, *L*, *M* и *N* – середины сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно четырехугольника *ABCD*, *E* и *F* – середины диагоналей *AC* и *BD* (см. рис. 2). Пусть *Q* – середина отрезка *KM*. Тогда для любой точки *O*: $\overline{OK}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$, $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OC}+\overline{OD})$, поэтому, $\overline{OQ}=\frac{1}{2}(\overline{OK}+\overline{OM})$ = $\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$.

Пусть Q_1 – середина отрезка *LN*, а Q_2 – середина отрезка *EF*. Рассуждая аналогично, получим: $\overline{OQ_1}=\frac{1}{2}(\overline{OL}+\overline{ON})$ = $\frac{1}{4}(\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{OD})$ и $\overline{OQ_2}=\frac{1}{2}(\overline{OE}+\overline{OF})$ = $\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OC}+\overline{OB}+\overline{OD})$. Таким образом, точки Q_1 и Q_2 совпадают с точкой *Q*, что равносильно утверждению задачи.

Следствие 1. Точка *Q* пересечения трех указанных отрезков является центроидом четырехугольника *ABCD*.

Следствие 2. Для поиска центроида четырех точек можно разбивать их на пары произвольным образом и находить середину отрезка, соединяющего центроиды пар.

А как искать центроид системы, в которой больше, чем четыре точки?

Пример 2. Известно, что T_1 – центроид системы точек A_1, A_2, ... A_n; T_2 – центроид системы точек B_1, B_2, ... B_k, *T* – центроид A_1, A_2, ... A_n, B_1, B_2, ... B_k. Докажите, что точка *T* лежит на отрезке T_1T_2 и $\frac{TT_1}{TT_2}=\frac{k}{n}$.

Доказательство. Из условия задачи следует, что для любой точки *O*: $\overline{OT_1}=\frac{1}{n}(\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+...+\overline{OA_n})$; $\overline{OT_2}=\frac{1}{k}(\overline{OB_1}+\overline{OB_2}+...+\overline{OB_k})$. Тогда $\overline{OT}=\frac{1}{n+k}(\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+...+\overline{OA_n}+\overline{OB_1}+\overline{OB_2}+...+\overline{OB_k})$ = $\frac{1}{n+k}(n\overline{OT_1}+k\overline{OT_2})$ = $\frac{n\overline{OT_1}+k\overline{OT_2}}{n+k}$.

Следовательно, точка *T* лежит на отрезке T_1T_2 и $\frac{TT_1}{TT_2}=\frac{k}{n}$.

В заключение отметим, что ни в определениях, ни в доказанных утверждениях, нигде не использовано, что точки лежат в одной плоскости, поэтому все рассмотренные факты справедливы для пространства любой размерности!

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Даны точки *A*, *B*, *C* и *D* так, что *AD* = 3, *BD* = 4, *CD* = 2. Может ли расстояние от точки *D* до точки пересечения медиан треугольника *ABC* равняться 3?

2. Клетки доски размером 2017×2017 раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета так, что угловые клетки черные. Для каждой пары разноцветных клеток рассматривается вектор, идущий из центра черной клетки в центр белой. Найдите сумму всех рассматриваемых векторов.

3. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены параллелограммы AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Докажите, что из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 можно составить треугольник.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что они делят стороны в одном и том же отношении (считая от вершин A, B и C соответственно). Докажите, что:

а) из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 можно составить треугольник;

б) центроиды треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

5. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Пусть M – центроид треугольника ACE, а N – центроид треугольника BDF. Докажите, что точки M и N совпадают тогда и только тогда, когда из отрезков AB, CD и EF можно составить треугольник.

6. Докажите, что точка G пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ лежит на отрезке DM, где M – точка пересечения медиан треугольника ABC, и делит этот отрезок в отношении 3 : 1, считая от точки D.

7. Сумма расстояний между серединами противолежащих сторон выпуклого четырехугольника равна его полупериметру. Докажите, что этот четырехугольник – параллелограмм.

8. а) На берегу озера растут шесть сосен. Известно, что если взять два треугольника так, что вершины одного из них находились в основаниях трех сосен, а вершины другого – в основаниях трех других сосен, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения медиан этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, каким образом разбивать данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придётся опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?

б) Ответьте на аналогичный вопрос, если озеро – круглое, а клад находится в середине отрезка, соединяющего ортоцентры треугольников.

9. Буратино зарыл клад в роще, где росло n деревьев. К месту клада он шел так: сначала по прямой от первого дерева ко второму, пока не прошел половину расстояния между этими деревьями; затем от этой точки он шел в направлении третьего дерева, пока не прошел треть расстояния от нее до дерева, оттуда повернул в сторону четвертого дерева и прошел четверть расстояния до него, и так далее, пока не прошел $\frac{1}{n}$ расстояния по направлению к n–ому дереву, и в этой точке выкопал яму. Беда в том, что Буратино забыл, каким образом пронумеровал деревья. Сколько ям должен выкопать Буратино, чтобы наверняка найти клад?