Восстановите треугольник по трем точкам

Как и в прошлом году, первое занятие кружка будет посвящено задачам на построение. Разнообразных задач на построение очень много, поэтому к этой теме мы будем периодически возвращаться. На этом занятии мы ограничимся задачами, в которых , как правило, требуется восстановить треугольник по каким-то трем его точкам. С такими задачами вы уже встречались в занятиях на различные темы, так как основой для их решения являются те или иные факты геометрии треугольника. Напомню одну из таких задач.

Пример 1. Восстановите треугольник *ABC*, зная положение центров трех его вневписанных окружностей.

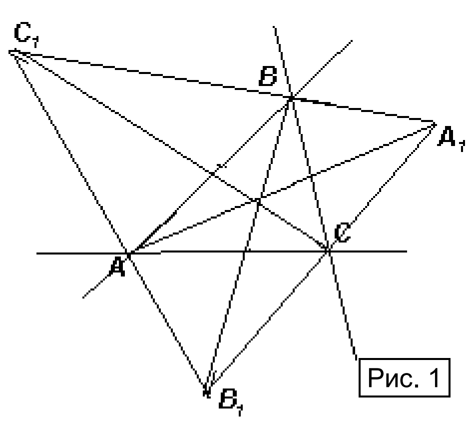


Рис. 1

Решение. Пусть искомый треугольник *ABC*, в котором заданные точки A_1, B_1 и C_1 являются центрами вневписанных окружностей, построен (см. рис. 1). Заметим, что центр каждой вневписанной окружности лежит на пересечении соответствующих биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника *ABC*.

Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$. Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, то вершины *A*, *B* и *C* искомого треугольника лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, так как биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла, проведенной из той же вершины, то $A_1A\perp B_1C_1$, $B_1B\perp A_1C_1$, $C_1C\perp A_1B_1$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению треугольника $A_1B_1C_1$ и его высот.

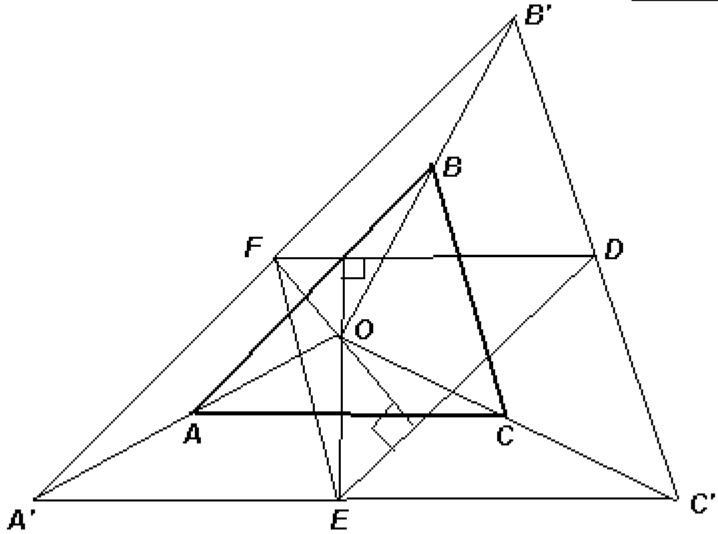
Отметим, что в задачах на «восстановление фигур» по заданным точкам проводить исследование, как правило, не принято, но в данном случае полезно отметить, что задача имеет решение, если треугольник $A_1B_1C_1$ – остроугольный, причем это решение – единственное. Почему?

[Угол между биссектрисами внешних углов треугольника – острый]

При решении других задач могут использоваться другие факты геометрии треугольника, подчас, менее очевидные.

Пример 2. Восстановите остроугольный треугольник, если заданы точки, симметричные центру описанной около него окружности относительно его сторон.

Рис. 2



Решение. Используем, что центр *O* окружности, описанной около треугольника, является ортоцентром его ***срединного треугольника*** (треугольника, образованного его средними линиями, см. рис. 2). Пусть заданы точки *D*, *E* и *F*. Треугольник *DEF* гомотетичен этому срединному треугольнику с центром *O* и коэффициентом 2. Следовательно, его стороны являются средними линиями треугольника, гомотетичного искомому с таким же центром и оэффициентом.

Таким образом, решение задачи сводится к построению ортоцентра *O* треугольника *DEF*, построению треугольника, для которого *DEF* является срединным и получению искомого треугольника *ABC* гомотетией с центром *O* и коэффициентом 0,5.

Отметим, что треугольники ABC и DEF центрально - симметричны (докажите!).

Таким образом, решение задач на восстановление треугольника поможет вам вспомнить основные важные факты геометрии треугольника.

Задачи для самостоятельного решения

1. Восстановите остроугольный треугольник, если заданы:
а) основания его высот;
б) точки, симметричные его ортоцентру относительно сторон;
в) точки пересечения биссектрис его углов с описанной окружностью.

2. Восстановите треугольник, если заданы:
а) точки пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведенными из одной вершины;
б) центры вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей;
в) его центр описанной окружности, точка пересечения медиан и основание одной из высот;
г) середина стороны и середины высот, проведенных к двум другим сторонам;
д) центр вписанной окружности, середина одной из сторон и основание высоты, проведенной к этой стороне.

3. Восстановите треугольник ABC по вершине B, точке M пересечения медиан и точке L пересечения симедианы, проведенной из вершины B, с описанной окружностью.

4. Восстановите параллелограмм $ABCD$, если на плоскости отмечены три точки: середины его высот BH и BP и середина M стороны AD.