Квадрат, вписанный в квадрат

На этом занятии мы займемся задачами, в которых возникает конструкция из нескольких квадратов, а именно: вершины одного квадрата лежат на сторонах другого. Такая конструкция уже встречалась в некоторых задачах на предыдущих занятиях. Напомню одну из задач.

Пример. На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке *O*. Докажите, что *CO* – биссектриса прямого угла.

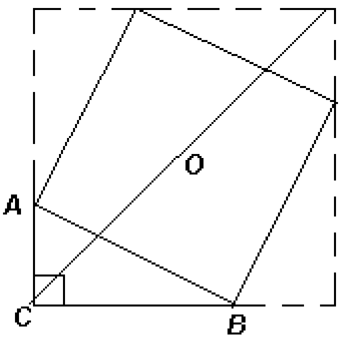


Рис. 1

Решение. Продлим катеты данного треугольника и опишем прямоугольник вокруг данного квадрата (см. рис. 1). Полученный прямоугольник является квадратом, так как в прямоугольных треугольниках равны гипотенузы и соответствующие острые углы (их стороны попарно перпендикулярны). Из равенства этих треугольников следует равенство сторон описанного прямоугольника, то есть, он является квадратом.

Тогда *CO* – диагональ этого квадрата, которая делит угол *C* пополам.

Попутно доказан важный факт: ***прямоугольник, описанный около квадрата, является квадратом***.

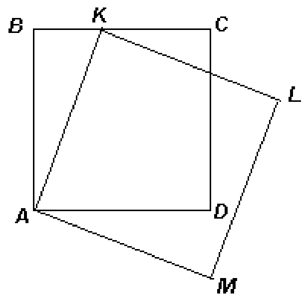
В большинстве задач, которые вы будете решать самостоятельно, либо сразу будет возникать подобная или похожая на нее конструкция, либо ее можно будет получить путем дополнительных построений.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. На сторонах *AB*, *BC*, *CD* и *DA* квадрата *ABCD* отмечены точки *K*, *L*, *M* и *N* соответственно так, что *AK* = *BL* = *CM* = *DN*. Докажите, что а) *KLMN* – квадрат; б) центры квадратов *ABCD* и *KLMN* совпадают; в) отрезки *KM* и *LN*, пересекаясь, делят квадрат *ABCD* на четыре равные фигуры.

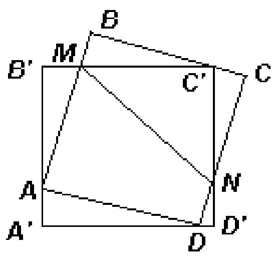
2. На сторонах *AB*, *BC*, *CD* и *DA* квадрата *ABCD* отмечены точки *K*, *L*, *M* и *N* соответственно так, что *AK* = *BL* = *CM* = *AN*. Докажите, что $\angle LMC = \angle MKN$.

3. а) Два отрезка, соединяющие точки на противолежащих сторонах квадрата, перпендикулярны. Докажите, что эти отрезки равны. б) Справедливо ли обратное утверждение?



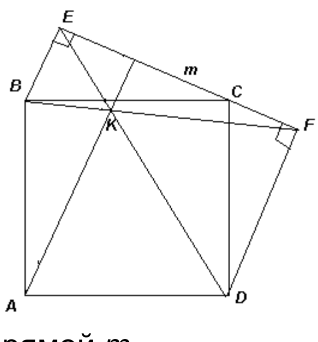
4. Квадраты *ABCD* и *AKLM* расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что: а) *CL* || *BD*; б) точка *M* лежит на прямой *CD*.

5. Квадраты *ABCD* и *A'B'C'D'* расположены так, что вершины *A* и *D* первого квадрата лежат на сторонах *A'B'* и *A'D'* второго, а вершина *C'* второго – на стороне *BC* первого (см. рисунок). Докажите, что отрезок *MN*, соединяющий две общие точки границ квадратов, проходит через центр *O* квадрата *ABCD*.



6. На стороне *AB* квадрата *ABCD* отмечена точка *K*, а на стороне *BC* – точка *L* так, что *KB* = *LC*. Отрезки *AL* и *CK* пересекаются в точке *P*. Докажите, что прямые *DP* и *KL* перпендикулярны.

7. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC*. На продолжениях катетов *AB* и *AC* отложены равные отрезки *BK* и *CL*. Из точек *A* и *B* проведены перпендикуляры к *KC*, которые пересекли *KL* в точках *F* и *E* соответственно. Докажите, что *EF* = *FL*.



8. Дан квадрат *ABCD*. Через вершину *C* проведена прямая *m*, не имеющая с квадратом других общих точек (см. рисунок). Точки *E* и *F* – проекции вершин *B* и *D* на прямую m. Отрезки *BF* и *DE* пересекаются в точке *K*. Докажите, что прямая *AK* перпендикулярна прямой *m*.

9. На сторонах *AB*, *BC*, *CD* и *DA* квадрата *ABCD* отмечены точки *K*, *L*, *M* и *N* соответственно так, что *AK* = *BL* = *CM* = *DN*. Пусть *DK* пересекает *NM* в точке *E*, а *KC* пересекает *LM* в точке *F*. Докажите, что *EF* || *AB*.

10. а) Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны и перпендикулярны, то описанный около него прямоугольник является квадратом. б) Вокруг выпуклого четырехугольника *ABCD* описаны три прямоугольника. Известно, что два из этих прямоугольников являются квадратами. Верно ли, что и третий обязательно является квадратом?