Равновеликость

В течение нескольких занятий мы будем заниматься площадями фигур. Для решения задач сегодняшнего занятия вам, если и понадобятся вычисления, то очень простые. Из формул для вычисления площадей потребуется в какой-то мере использовать только две: площади параллелограмма и треугольника.

В предлагаемых задачах требуется либо доказать, что какие-то фигуры ***равновелики*** (то есть имеют равные площади), либо равновеликость фигур используется как раз для того, чтобы максимально упростить вычисления. Рассмотрим два простых примера.

Пример 1. Сторону AB треугольника ABC продолжили за вершину B и выбрали на луче AB точку A_1 так, что точка B – середина отрезка AA_1. Аналогично, сторону BC продолжили за вершину C и отметили на продолжении точку B_1 так, что C – середина BB_1. Так же продолжили сторону CA за вершину A и отметили на продолжении точку C_1 так, что A – середина CC_1. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 1 (см. рис. 1).

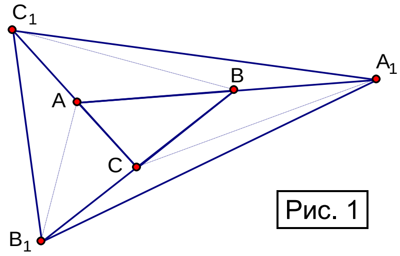
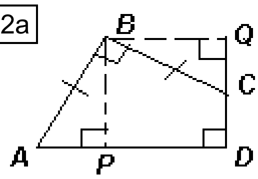


Рис. 1

Решение. Соединим точки B_1 и A, C_1 и B, A_1 и C. Площади треугольников ABC и C_1AB равны, так как у них равны основания AC_1 и AC и общая высота, проведенная из вершины B. Аналогично, равны площади треугольников ABC и A_1BC, ABC и B_1AC. Площади треугольников ABC_1 и BA_1C_1 равны, так как у них равны основания AB и BA_1 и общая высота, проведенная из вершины C_1. Аналогично, равны площади треугольников ACB_1 и AC_1B_1, CBA_1 и CB_1A_1. Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ разбит на 7 треугольников площади 1.

Ответ: 7.

Пример 2. В четырехугольнике $ABCD$: $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ (см. рисунок). Найдите его площадь, если расстояние от вершины B до прямой AD равно 1.

Рис. 2а


Решение. Первый способ. Проведем перпендикуляры BP и BQ к прямым AD и CD (см. рис. 2а). Тогда из равенства прямоугольных треугольников ABP и CBQ (по гипотенузе и катету) следует, что площадь $ABCD$ равна площади квадрата $BPDQ$ со стороной 1.

По сути, треугольник CBQ получается из треугольника ABP поворотом вокруг точки B на 90° против часовой стрелки.

Второй способ. Продлим отрезки AB и CB на свою длину за точку B и получим квадрат $ACA'C'$ (*центральная симметрия относительно точки* B, см. рис. 2б). Опишем около этого квадрата прямоугольник, который также является квадратом, тогда площадь $ABCD$ равна четверти площади квадрата со стороной 2.

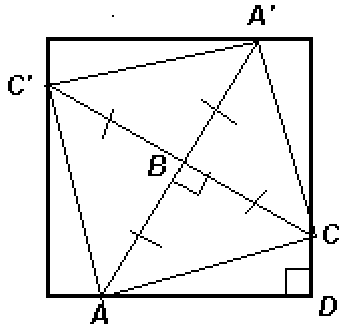


Рис. 2б

Задачам, при решении которых используются вспомогательные квадраты, будет посвящено отдельное занятие.

Ответ: 1.

Большая часть задач этого занятия придумана двумя замечательными математиками: Вячеславом Викторовичем Произволовым и Максимом Анатольевичем Волчкевичем. К их творчеству мы еще не раз обратимся в последующих занятиях.

Задач для самостоятельного решения предлагается много, так как часть из них – довольно простые, но полезные. В их расположении по нарастанию трудности я не уверен, поэтому вполне можно «перескакивать».

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. а) Параллелограммы $ABCD$ и $BEFG$ с общей вершиной B расположены так, что точка C лежит на отрезке EF, а точка G – на отрезке AD. Докажите, что эти параллелограммы равновелики.

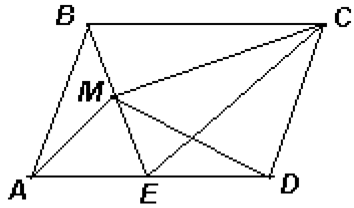
б) Точки E – середина боковой стороны CD, а точка F – середина большего основания AD трапеции $ABCD$. Отрезки AE и BF пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOB и четырехугольник $DEOF$ равновелики.

2. а) В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) из точки E – середины CD провели перпендикуляр EF к прямой AB. Найдите площадь трапеции, если $AB = 5$, $EF = 4$.

б) В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) расстояния от вершин A и B до прямой CD равны 7 и 1 соответственно. Найдите площадь трапеции, если $CD = 5$.

3. а) Противолежащие стороны шестиугольника $ABCDEF$ равны и параллельны. Найдите площадь треугольника ACE, если площадь шестиугольника равна S.

б) Точки K и L – середины сторон AB и BC правильного шестиугольника $ABCDEF$. Отрезки KD и LE пересекаются в точке M. Площадь треугольника DEM равна 12. Найдите площадь четырехугольника $KBLM$.

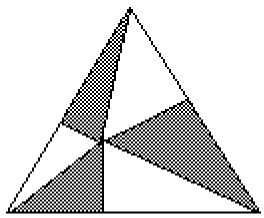


4. а) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана произвольная точка P и проведены отрезки PA, PB, PC и PD. Площади трех из образовавшихся треугольников равны 1, 2 и 3 (в каком-то порядке). Какие значения может принимать площадь четвертого треугольника?

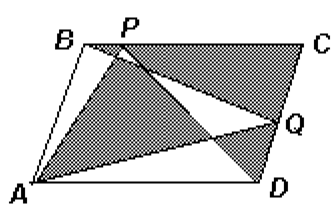
б) Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M. Прямая BM пересекает сторону AD в точке E (см. рисунок). Докажите, что треугольники AMD и CME равновелики.

5. а) Точка O, лежащая внутри выпуклого четырехугольника площади S, симметрично отражается относительно середин его сторон. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в полученных точках.

б) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отмечены середины противоположных сторон BC и AD – точки M и N. Диагональ AC проходит через середину отрезка MN. Найдите площадь $ABCD$, если площадь треугольника ABC равна S.

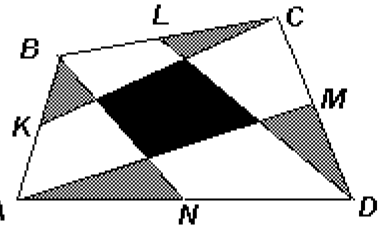


6. а) Внутри равностороннего треугольника отмечена точка, которая соединена отрезками с вершинами и из нее проведены перпендикуляры к сторонам (см. рисунок). Три из образовавшихся шести треугольников заштрихованы (через один). Докажите, что сумма площадей заштрихованных треугольников равна половине площади треугольника.



б) На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q. Точку P соединили отрезками с вершинами A и D, а точку Q – с вершинами A и B (см. рисунок). Докажите, что площадь одной из закрашенных частей равна сумме площадей трех других.

в) Точки K, L, M и N – середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей заштрихованных треугольников равна площади закрашенного четырехугольника.



7. а) В пятиугольнике $ABCDE$: $BC \parallel AD$, $CD \parallel BE$. Докажите, что треугольники ABC и CDE равновелики. б) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$: $BC = CD = AE = 1$, $AB + DE = 1$, $\angle ABC = \angle CDE = 90°$. Найдите его площадь. в) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$: $\angle A = \angle C = 90°$, $AB = AE$, $BC = CD$, $AC = 1$. Найдите площадь пятиугольника.