14.03.17

Кратчайшие маршруты

Использованы материалы из книжки М.А. Волчкевича «Уроки геометрии в задачах. 7 – 8 классы», – М.: МЦНМО, 2016.

В течение двух занятий мы займемся геометрическими задачами, связанными с наибольшими и наименьшими значениями каких-либо величин. Такие задачи называются ***экстремальными*** (*от слова extremum – крайний*). Задачи сегодняшнего занятия будут связаны с поиском кратчайших маршрутов или наименьших сумм расстояний.

Задачи этого занятия будут связаны с поиском кратчайших маршрутов на плоскости или наименьших сумм расстояний.

В качестве примера рассмотрим знаменитую задачу Герона Александрийского.

Пример. Дана прямая *m* и точки *A* и *B*, лежащие в одной полуплоскости относительно *m*.
а) Постройте на прямой *m* такую точку *M*, чтобы ломаная *AMB* имела наименьшую длину.
б) Постройте на прямой *m* отрезок *CD* заданной длины (*много меньшей, чем расстояние от A до B*) так, чтобы длина ломаной *ACDB* была наименьшей.

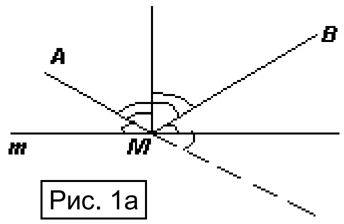

Рис. 1а

Идея решение может возникнуть из физических соображений. Из курса физики известно, что свет распространяется прямолинейно с одной и той же скоростью по кратчайшему пути. Представим себе, что прямая m – это зеркало. Тогда луч, выпущенный из точки A и попавший в точку B, отразившись от зеркала в точке M, пройдет так, что угол его падения будет равен углу отражения, то есть равны углы, которые образуют эти лучи с перпендикуляром к прямой m (см. рис. 1а). Следовательно, должны быть равны и углы, которые эти лучи образуют с прямой m, то есть, продлив AM за точку M, мы получим равные углы. Теперь эту идею можно оформить геометрически.

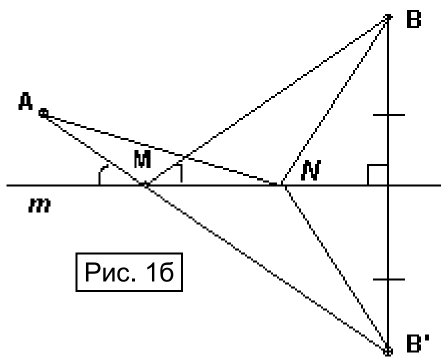

Рис. 1б

Решение. а) Пусть искомая точка *M* построена. Рассмотрим точку *B*', симметричную точке *B* относительно прямой *m* (см. рис. 1б). Длина ломаной *AMB* равна: *AM* + *MB* = *AM* + *MB*'. Эта длина будет наименьшей из возможных, если точка *M* лежит на отрезке *AB*'. Действительно, для любой другой точки *N*, лежащей на прямой *CD*, *AN* + *NB* = *AN* + *NB*' > *AB*' = *AM* + *MB*'.

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки *B*', симметричной точке *B* относительно прямой *m*. Искомая точка *M* является пересечением прямых *AB*' и *m*.

Понятно, что точки A и B равноправны, поэтому можно было строить точку, симметричную точке A. Отметим также, что эту задачу можно формулировать различным образом, моделируя различные жизненные ситуации.

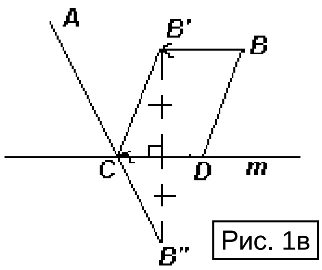

Рис. 1в

б) Пусть искомые точки *C* и *D* построены и отрезок *CD* имеет заданную длину (см. рис. 1в). Длина ломаной *ACDB* зависит только от суммы длин *AC* и *BD*, поэтому «передвинем» отрезок *BD* параллельно самому себе так, чтобы он занял положение *B'C* (*то есть рассмотрим* ***параллельный перенос*** *на вектор* $\overline{DC}$), тогда отрезки *AC* и *B'C* образуют равные углы с прямой *m*, что дает наименьшее значение суммы длин *AC* и *BD*.

Таким образом, после выполнения параллельного переноса вдоль прямой *m* на отрезок заданной длины (например, в направлении от *B* к *A*), решение задачи сведется к построению точки *C*, описанному в пункте а). Затем «передвинем» все обратно (*выполним* ***параллельный перенос*** *на вектор* $\overline{CD}$*, обратный к рассмотренному*), и получим требуемую ломаную.

Отметим, что точка B'', использованная при описанном построении является образом точки B при ***скользящей симметрии*** *(композиции осевой симметрии и параллельного переноса вдоль этой оси).*

Таким образом, многие задачи, связанные с наименьшей длиной пути, решаются с использованием осевой симметрии и параллельного переноса. Но, наряду с ними, могут использоваться и другие приемы, которые вам придется придумать.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

2. а) Дан острый угол *AOB* и точка *M* внутри него. На сторонах угла постройте точки *X* и *Y* так, чтобы периметр треугольника *MXY* был наименьшим.

б) Найдите этот периметр, если $\angle AOB = 30°$, $OM = 1$.

3. Внутри острого угла *AOB* даны точки *M* и *N*. Постройте на сторонах угла точки *X* и *Y* так, чтобы периметр четырехугольника *XMNY* был наименьшим.

4. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и до всех сторон треугольника – наименьшая.

5. а) Населенные пункты *A* и *B* разделены каналом с параллельными берегами. В каком месте необходимо построить мост (перпендикулярно берегам), чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?

б) Населенные пункты *A* и *B* разделены двумя непараллельными друг другу каналами (у каждого канала два берега параллельны). Где нужно построить мосты, чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?

6. Дан равносторонний треугольник *ABC*. Постройте прямую *m* так, чтобы сумма расстояний от вершин треугольника до *m* была наименьшей.

7. Один из углов остроугольного треугольника равен 30°. На сторонах треугольника отмечено по одной точке. Докажите, что наименьший периметр треугольника с вершинами в этих точках равен одной из высот данного треугольника.

8. Дан остроугольный треугольник *ABC*. На его сторонам отмечены точки *K*, *L* и *M* (по одной на каждой стороне). Укажите положение этих точек, для которого периметр треугольника будет наименьшим. (***Задача Фаньяно***)

9. На каждой стороне прямоугольника отмечено по точке. Докажите, что наименьший периметр четырехугольника с вершинами в этих точках равен сумме диагоналей прямоугольника.

10. Дан угол и точка внутри него. Постройте прямую, проходящую через эту точку, которая отсекает от угла треугольник наименьшего периметра.

M'XYM'' фиксировано, то такая сумма принимает наименьшее значение, если точки *X* и *Y* лежат на отрезке *M'M''*.