28.02.17

Теорема Карно

Вы уже не раз сталкивались с задачами, в которых надо доказать, что три прямые пересекаются в одной точке (см., например, занятие «Прямые, содержащие высоты треугольника»). На этом и на следующем занятии мы расширим арсенал ваших возможностей для решения таких задач.

На занятии по теме «Теорема Пифагора и теорема, ей обратная» мы познакомились с принципом Карно. В чем его смысл?

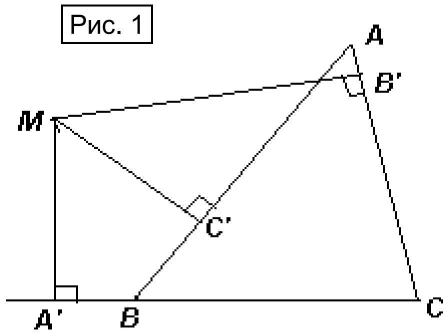
Принцип замены разности квадратов наклонных на разность квадратов их проекций называется принципом Карно.

Этот результат был также сформулирован с точки зрения ГМТ.

Геометрическим местом точек М плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек А и В – постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку АВ.

Помимо прочего, полученный результат помогает сформулировать и доказать теорему, которая часто применяется для доказательства того, что какие-то три перпендикуляра пересекаются в одной точке. Эта теорема также носит имя Лазаря Карно.

Рис. 1



Рассмотрим произвольный треугольник *ABC*. Отметим на прямых *BC*, *CA* и *AB* точки *A*', *B*' и *C*' соответственно и восставим перпендикуляры в этих точках к прямым, на которых они лежат (см. рис. 1). Пусть эти перпендикуляры пересеклись в одной точке *M*. Выведем равенство, связывающее между собой расстояния от точек *A*', *B*' и *C*' до вершин треугольника.

По принципу Карно запишем три равенства: $MC^2 - MB^2 = A'C^2 - A'B^2$; $MB^2 - MA^2 = C'B^2 - C'A^2$; $MA^2 - MC^2 = B'A^2 - B'C^2$. Сложив их почленно, получим: $A'C^2 + C'B^2 + B'A^2 = A'B^2 + C'A^2 + B'C^2$ (*показать на чертеже*). Это есть необходимое условие пересечения трех таких перпендикуляров в одной точке.

Является ли оно достаточным? Да, конечно. Докажем это.

Пусть *M* – точка пересечения перпендикуляров в точках *A*' и *B*' к *BC* и *CA* соответственно. Опустим перпендикуляр MC_1 на *AB*, тогда $A'C^2 + C_1B^2 + B'A^2 = A'B^2 + C_1A^2 + B'C^2$. Сравнивая два соотношения, получим, что $C'B^2 - C'A^2 = C_1B^2 - C_1A^2$, то есть точки C_1 и *C*' совпадают.

Таким образом, ***если точки A', B' и C' лежат на прямых BC, CA и AB соответственно, то перпендикуляры, восставленные из этих точек к этим прямым пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство*** $A'C^2 + C'B^2 + B'A^2 = A'B^2 + C'A^2 + B'C^2$**.**

Это утверждение и называется ***теоремой Карно***, а записанное равенство называется ***соотношением Карно***. Его иногда пишут по-другому, перенеся все слагаемые в одну часть.

Все задачи, предложенные ниже, так или иначе связаны с пересечением перпендикуляров в одной точке. Возможно, что для решения каких-то из них теорема Карно и не потребуется, но в большинстве случаев ее использовать удобно. В нескольких задачах необходимость ее применения сформулирована в явном виде.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. а) Докажите, что перпендикуляры, опущенные из произвольных точек плоскости *A*', *B*' и *C*' на прямые *BC, CA* и *AB* соответственно пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A'C^2 + C'B^2 + B'A^2 = A'B^2 + C'A^2 + B'C^2$ (***обобщение теоремы Карно***).

б) Объясните, как используя это обобщение, доказать, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.

2. а) Известно, что в выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$: $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Докажите, что биссектрисы углов B, D и F пересекаются в одной точке.

б) Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

в) Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что три их общие хорды пересекаются в одной точке (***лемма о трех хордах***).

г) Объясните, как использовать утверждение задачи 2в для доказательства пересечения трех высот треугольника в одной точке еще одним способом.

3. Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, AC и AB соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C на прямые B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 соответственно, также пересекаются в одной точке (***теорема Штейнера***).

4. а) Около треугольника ABC описана окружность. A_1 – точка пересечения ее с прямой, параллельной BC и проходящей через вершину A. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1 и C_1 опустили перпендикуляры на прямые BC, CA и AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

б) Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1 и C_2, сторону BC – в точках A_1 и A_2, сторону CA – в точках B_1 и B_2. Известно, что перпендикуляры к сторонам AB, BC и CA, восставленные в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к этим сторонам, восставленные в точках C_2, B_2 и A_2 соответственно, также пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке.

6. а) Докажите, что перпендикуляры, проведенные из центров вневписанных окружностей к тем сторонам треугольника ABC, которых эти окружности касаются, пересекаются в одной точке. б) Переформулируйте доказанное утверждение для треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей и объясните другой способ доказательства этого факта.

7. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Через точки A_1, B_1 и C_1 проведены прямые, соответственно параллельные OA, OB и OC, где O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

8. Пусть ABC – равносторонний треугольник, P – произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников PAB, PBC и PCA на прямые AB, BC и CA соответственно, пересекаются в одной точке.

9. Докажите, что перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда треугольник – равнобедренный.