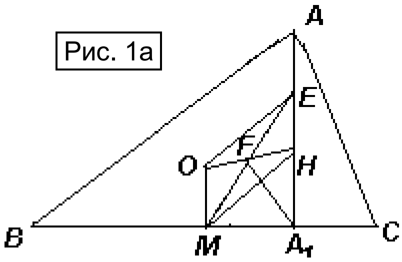
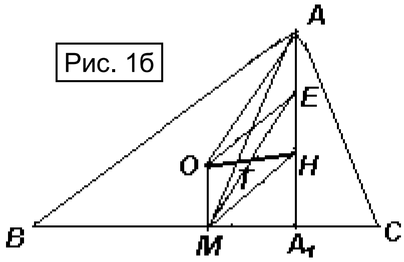
Окружность девяти точек и прямая Эйлера

Напомню, что на прошлом занятии была получена формула $OM = \dfrac{1}{2}AH$ и следствие из нее: четырехугольники *OMHE* и *OMEA* – параллелограммы (см. рис. 1 а, б).



Используя эти параллелограммы, в ходе решения задач вы получили еще несколько интересных фактов. Но самые интересные факты геометрии треугольника мы оставили на сегодня.

1) Пусть *F* – середина *OH* (см. рис. 1а). Докажем, что точки *E*, *M* и A_1 лежат на окружности с центром *F* и найдем радиус этой окружности.



Решение. Так как *F* – точка пересечения диагоналей параллелограмма *OMH*E и $\angle MA_1E = 90°$; то $FE = FM = FA_1 = \dfrac{1}{2}ME = \dfrac{1}{2}R$.

Проведя аналогичные рассуждения для отрезков *BH* и *CH*, получим другие точки, лежащие на этой же окружности: середины сторон *AB* и *AC*, основания высот BB_1 и CC_1, середины отрезков *BH* и *CH*.

Такая окружность называется ***окружностью девяти точек данного треугольника*** или ***окружностью Эйлера***. Она проходит ***через середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника*** (*изобразить*).

2) Проведем медиану *AM*, которая пересечет *OH* в точке *T* (см. рис. 1б). Так как треугольники *OTM* и *HTA* подобны (по двум углам), то $\dfrac{OT}{TH} = \dfrac{MT}{AT} = \dfrac{OM}{AH} = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, *T* – точка пересечения медиан треугольника *ABC*. Таким образом, ***в любом треугольнике центр O описанной окружности, точка T пересечения медиан и ортоцентр H лежат на одной прямой, которая называется прямой Эйлера***. При этом, ***точка T делит отрезок OH в отношении 1 : 2, считая от точки O***.

Отношение OT : TH можно было найти из других соображений: прямая AM пересекает сторону OE параллелограмма OEHM в ее середине, поэтому ее точка T пересечения с диагональю OH делит эту диагональ в отношении 1 : 2 (см. пример 1 занятия «Дополнительные построения_2»).

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что: а) точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон; лежат на описанной окружности; б) окружности, описанные около треугольников *ABC* и *BCH*, где *H* – ортоцентр треугольника *ABC*, симметричны относительно *BC*.

2. Точка *G* такова, что точки, симметричные ей относительно сторон треугольника, лежат на его описанной окружности. Верно ли, что *G* – ортоцентр треугольника *ABC*?

3. Докажите, что: а) прямая проходящая через точку пересечения медиан треугольника и середину отрезка, соединяющего вершину с ортоцентром, пересекает окружность в точке, диаметрально противоположной этой вершине; б) точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон; лежат на описанной окружности.

4. Найдите угол *A* треугольника *ABC*, если на его окружности девяти точек лежит середина отрезка: а) *AO*, где O – центр описанной окружности; б) *AI*, где *I* – центр вписанной окружности.

5. H – ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что: а) окружности девяти точек треугольников ABC, HAB, HBC и HCA совпадают; б) прямые Эйлера этих треугольников пересекаются в одной точке.
6. Докажите, что описанная окружность треугольника делит пополам отрезки, соединяющие центр ее вписанной окружности с центрами вневписанных окружностей.
7. В треугольнике ABC точка H_1, симметрична ортоцентру H относительно вершины C, а точка C_1 симметрична точке C относительно середины стороны AB. Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника ABC, является серединой отрезка H_1C_1.
8. Из вершины A остроугольного треугольника ABC провели высоту AE и диаметр описанной около треугольника окружности, который пересек сторону BC в точке D. Докажите, что описанная окружность треугольника ADE касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC.
9. Прямая Эйлера треугольника ABC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q так, что $AP = AQ$. Найдите угол A.
10. Центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой Эйлера. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.