24.01.17

Геометрическое место точек

На этом и на следующем занятии мы займемся задачами на поиск геометрических мест точек (ГМТ), обладающих теми или иными свойствами. Для начала вспомним, что такое ГМТ.

Определение. ГМТ, обладающих заданным свойством, – это фигура, состоящая из тех и только тех точек, для которых это свойство выполняется.

Поэтому, найдя искомое ГМТ – фигуру *F*, надо доказать два взаимно обратных утверждения:

А) Любая точка, принадлежащая *F*, обладает указанным свойством.

Б) Любая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит *F*.

Почему вместо Б) можно доказывать, что любая точка, не принадлежащая *F*, указанным свойством не обладает (*что иногда бывает удобнее*)?

[Метод «от противного, основанный на том, что $A \Rightarrow B \Leftrightarrow$ не $B \Rightarrow$ не A]

Простейшие ГМТ на плоскости.

1) ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной точки;
2) ГМТ, равноудаленных от двух данных точек;
3) ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной прямой;
4) ГМТ, равноудаленных от двух данных прямых (*два случая*);
5) ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом;
6) ГМТ, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

При решении задач желательно научиться грамотно использовать уже известные ГМТ, рационально проводить рассуждения, а также делать правильные выводы из того, какая величина получается фиксированной. Рассмотрим это на двух простых примерах.

Пример 1. Дан отрезок *AB*. Найдите ГМТ *X* таких, что: $\angle XAB > \angle XBA$.

Решение. Заданное свойство равносильно тому, что в треугольнике *XAB* выполняется неравенство $XB > XA$. Тогда, учитывая 2), ***искомым ГМТ является полуплоскость с границей m, в которой лежит точка A, не включающая границу и точки прямой AB*** (см. рис. 1).

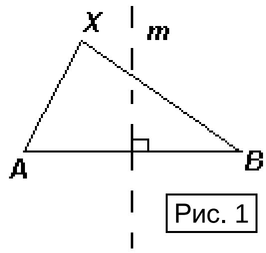
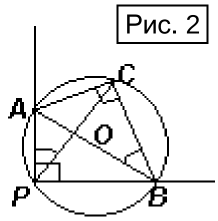


Рис. 1

Пример 2. Вершины *A* и *B* прямоугольного треугольника *ABC* ($\angle C = 90°$) скользят по сторонам прямого угла *P* (*C* не совпадает с *P*). По какой траектории движутся: а) середина *AB*; б) вершина *C*)?

Рис. 2



Решение. Пусть *P* – вершина данного прямого угла, *O* – середина *AB* (см. рис. 2). Тогда: а) $PO = \frac{1}{2}AB$ – постоянная величина, значит, ***точка O движется по окружности***; б) четырехугольник *ACBP* – вписанный, следовательно, $\angle APC = \angle ABC$, который фиксирован. Следовательно, ***точка C движется по прямой***.

Если бы речь шла о поиске ГМТ, то ГМТ O – четверть окружности с центром P и радиусом $\frac{1}{2}AB$*, лежащая внутри угла P, а ГМТ C – отрезок указанной прямой, лежащий внутри угла P и* $CA \le PC \le CB$ *(или наоборот).*

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Окружность радиуса *R* катится по прямой. По какой траектории движется ее центр?

2. Дан прямоугольник *ABCD*. Найдите ГМТ *M* таких, что $AM + BM \le CM + DM$.

3. Пусть *O* – центр равностороннего треугольника *ABC*. Найдите ГМТ *M*, удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведенная через точку *M*, пересекает хотя бы один из двух отрезков: *AB* или *CO*.

4. *A* и *B* – фиксированные точки на плоскости. Найдите ГМТ *M*, для которых *A*, *B* и *M* являются вершинами равнобедренного треугольника.

5. Даны две перпендикулярные прямые и отмечена точка M, не принадлежащая им. По одной прямой движется точка P, а по другой – точка Q так, что угол PMQ всегда остается прямым. Найдите ГМТ, симметричных M относительно прямой PQ.

6. Даны две перпендикулярные прямые и точка C, не принадлежащая ни одной из них. Рассмотрим все прямоугольники $CDME$ такие, что вершина D лежит на одной из данных прямых, а вершина E – на другой. Найдите ГМТ M.

7. Точки P и Q движутся с одинаковой постоянной скоростью v по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что на плоскости существует точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

8. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC – точка L так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

9. На биссектрисе данного угла зафиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найдите геометрическое место середин оснований таких треугольников.