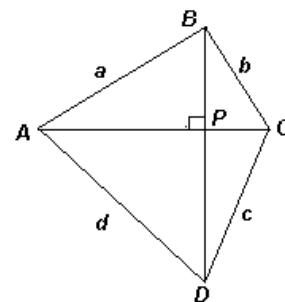


### Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

Напомню, что на прошлом занятии был сформулирован принцип Карно, из которого следует, что **геометрическим местом точек плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек  $A$  и  $B$  – постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку  $AB$ .**



Одна из задач, которую многие решили, формулировалась так: **диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.**

Действительно, непосредственно из этого утверждения следует, что  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = d^2 - c^2 \Leftrightarrow BD \perp AC$  (см. рисунок).

Это утверждение верно как для выпуклого, так и для невыпуклого четырехугольника, но сегодня мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники, так как, помимо перпендикулярности диагоналей, они, как правило, будут еще и вписанными.

В связи с появлением окружности, вам потребуется также вспомнить: 1) теорему о вписанном угле; 2) необходимое и достаточное условие того, чтобы четырехугольник был вписанным; 3) теорему об угле между касательной и хордой.

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

- Докажите, что если четырехугольник  $ABCD$  с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром  $O$ , то  $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ .
- Докажите, что во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями расстояние от центра описанной окружности до стороны равно половине противоположной стороны.
- Через вершины вписанного четырехугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что точки их попарного пересечения являются вершинами вписанного четырехугольника тогда и только тогда, когда диагонали исходного четырехугольника взаимно перпендикулярны.
- Докажите, что во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями прямая, проведенная из точки пересечения диагоналей перпендикулярно стороне делит противоположную сторону пополам.
- Диагонали четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность радиуса  $R$ , перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ . а) Докажите, что  $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$ . б) Найдите сумму квадратов сторон четырехугольника  $ABCD$ .
- Прямоугольник  $ABCD$  вписан в окружность,  $M$  – произвольная точка этой окружности (не совпадающая с вершинами). Докажите, что из отрезков  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  и  $MD$  можно составить контур четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, вписанного в ту же окружность.
- Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда: а) середины его сторон лежат на одной окружности; б) основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.
- Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является вписанным, то окружности, указанные в задачах 7а и 7б, совпадают.
- Пусть  $ABCD$  – вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями,  $P$  – точка их пересечения. Докажите, что: а) четырехугольник, образованный проекциями  $P$  на стороны данного четырехугольника, является описанным около окружности с центром  $P$ ; б) стороны этого четырехугольника соответственно параллельны сторонам четырехугольника, образованного попарным пересечением касательных в вершинах данного четырехугольника (см. задачу 3).

10. а) Пусть проекции некоторой точки  $T$  на стороны четырёхугольника  $ABCD$  лежат на одной окружности. Докажите, что прямые, симметричные прямым  $AT$ ,  $BT$ ,  $CT$  и  $DT$  относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке.
- б) На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $C'$  и  $B'$  соответственно так, что  $BB' \perp CC'$ . Точка  $X$  внутри треугольника такова, что  $\angle XBC = \angle B'BA$ ,  $\angle XCB = \angle C'CA$ . Докажите, что  $\angle B'XC' = 90^\circ - \angle A$ .