## Теорема Пифагора и принцип Карно

Все задачи этого занятия будут так или иначе связаны с теоремой Пифагора или с теоремой, ей обратной. Сформулируйте обратную теорему. Как она доказывается?

Во многих задачах требуется доказать перпендикулярность каких-либо прямых. Иногда для этого хватает этой теоремы, в других случаях эта перпендикулярность «вылезает» из пересечения высот какого-то треугольника (этому было посвящено отдельное занятие). Сегодня мы рассмотрим еще один, достаточно «мощный» метод доказательства перпендикулярности.

Дана прямая, к которой из одной точки проведены две наклонные *MA* и *MB* (см. рис. 1а, б). Пусть длины этих наклонных равны *a* и *b*, а длины их проекций равна *a*’ и *b*’.

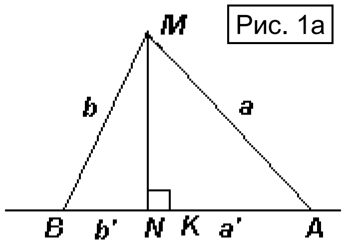


Рис. 1а

1) Докажите, что $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$. 2) Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

[1) Рассмотрим точку *N* – ортогональную проекцию точки *M* на прямую *AB*. Применив теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам *AMN* и *BMN*, получим равенство, равносильное требуемому. 2) Если для точки *K*, лежащей на прямой *AB*, выполняется равенство: $a^2 - b^2 = KA^2 - KB^2$, то она является ортогональной проекцией точки *M* на *AB*.

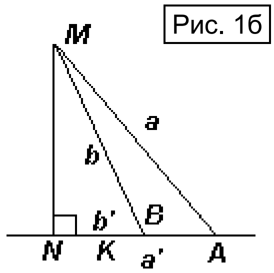


Рис. 1б

Из равенства, данного в условии, и равенства, доказанного в пункте 1), следует, что $NA^2 - NB^2 = KA^2 - KB^2 \Leftrightarrow (NA - NB)(NA + NB) = (KA - KB)(KA + KB)$. Значит, если $N \in [AB]$, то $NA - NB = KA - KB$, а если $N \notin [AB]$, то $NA + NB = KA + KB$. В обоих случаях $N \equiv K$]

***Принцип замены разности квадратов наклонных на разность квадратов их проекций называется принципом Карно***.

*Эта фамилия вам наверняка знакома. Французский математик, механик, военный инженер, государственный деятель Лазарь Карно (1753 – 1823), ученик Гаспара Монжа (создателя начертательной геометрии), занимался, в том числе, и проблемами элементарной геометрии*.

Полученный результат можно сформулировать на языке ГМТ.

***Геометрическим местом точек M плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B – постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку AB***.

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

**1.** Катеты прямоугольного треугольника равны *a* и *b*, его гипотенуза равна *c*, а высота, проведенная к гипотенузе, равна *h*. Докажите, что треугольник со сторонами *a* + *b*, *h* и *c* + *h* также является прямоугольным.

**2.** Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов их длин равна квадрату суммы длин оснований.

**3.** а) Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противолежащих сторон.

б) Даны четыре палочки, из которых можно составить контур четырехугольника с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что из них также можно составить контур четырехугольника с двумя прямыми углами.

**4.** Даны два лоскута материи, имеющие форму квадратов (их размеры – различны). Каким образом их нужно раскроить, чтобы из всех получившихся кусков можно было сшить скатерть, также имеющую форму квадрата?

**5.** Дан треугольник *ABC*. Постройте отрезок, который разобьет его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

**6.** Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является описанным, то он является дельтоидом (*дельтоид – четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, симметричный относительно одной из диагоналей*).
**7.** В шестиугольнике *ABCDEF*: углы *A* и *C* – прямые, *AB* = *BC*, *CD* = *DE*, *EF* = *FA*. Докажите, что прямые *DF* и *BE* перпендикулярны.
**8.** Через вершины *B* и *C* треугольника *ABC* перпендикулярно прямой *BC* проведены прямые *b* и *c* соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам *AB* и *AC* пересекают прямые *b* и *c* соответственно в точках *P* и *Q*. Докажите, что прямая *PQ* перпендикулярна медиане *AM* треугольника *ABC*.
**9.** *H* – ортоцентр равнобедренного треугольника *ABC*. На боковых сторонах *AB* и *BC* отмечены точки *M* и *K* соответственно так, что угол *KMH* – прямой. Докажите, что из отрезков *AK*, *CM* и *MK* можно составить прямоугольный треугольник.
**10.** Пусть *M* – середина хорды *AB* окружности с центром *O*. Точка *K* симметрична точке *M* относительно *O*, *P* – произвольная точка окружности. Перпендикуляр к прямой *AB* в точке *A* и перпендикуляр к прямой *PK* в точке *P* пересекаются в точке *Q*. Точка *H* – основание перпендикуляра, опущенного из *P* на *AB*. Докажите, что прямая *QB* делит отрезок *PH* пополам.