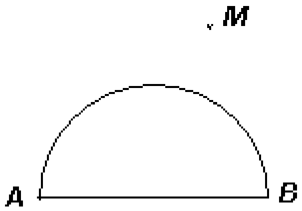
29.11.16

Пересечение прямых, содержащих высоты треугольника



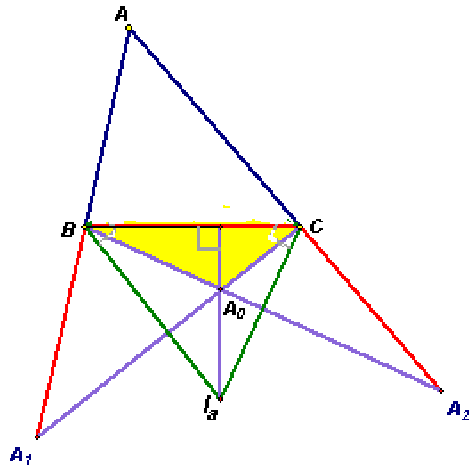
Для начала вспомним несколько задач, которые вам наверняка известны. В частности, часть утверждений встречалась уже на наших предыдущих занятиях.

Пример 1. А) Дана полуокружность с диаметром *AB* и точка *M* (см. рис.). Пользуясь только линейкой без делений, постройте перпендикуляр из точки *M* к прямой *AB*.

Б) Как изменится построение, если точка дана внутри полукруга?

Следующая задача была в занятии «Дополнительные построения_2» (№4).

Пример 2. В невыпуклом четырехугольнике *ABCD* углы *A*, *B* и *D* равны по 45°. Докажите, что середины его сторон являются вершинами квадрата.



Еще одна задача была на занятии «Вневписанная окружность_1» (№7) и ее тогда решили только двое.

Пример 3. Дан треугольник *ABC*. На лучах *AB* и *AC* (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой *BC*, содержит центр вневписанной окружности треугольника *ABC*.

Решение. Пусть I_a – центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны *BC* (см. рис.).

BI_a и CI_a – биссектрисы внешних углов *B* и *C* данного треугольника. По условию, треугольники A_1BC и A_2CB – равнобедренные, поэтому $BI_a \perp A_1C$ и $CI_a \perp A_2B$. Следовательно, I_a – точка пересечения двух высот треугольника A_0BC, значит третья высота этого треугольника лежит на прямой A_0I_a, то есть $A_0I_a \perp BC$, что и требовалось доказать.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Точки *C* и *D* лежат на окружности с диаметром *AB*. Прямые *AC* и *BD* пересекаются в точке *P*, а прямые *AD* и *BC* – в точке *Q*. Докажите, что *AB* перпендикулярно *PQ*.

2. В треугольнике *ABC* сторона *AC* наименьшая. На сторонах *AB* и *CB* взяты точки *K* и *L* соответственно, причём *KA* = *AC* = *CL* . Пусть *M* – точка пересечения *AL* и *KC* , а *I* – центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Докажите, что прямая *MI* перпендикулярна прямой *AC*.

3. Биссектриса угла *B* и биссектриса внешнего угла *D* прямоугольника *ABCD* пересекают сторону *AD* и прямую *AB* в точках *M* и *K* соответственно. Докажите, что отрезок *MK* перпендикулярен и равен диагонали прямоугольника.

4. Пусть *M* – основание перпендикуляра, опущенного из вершины *D* параллелограмма *ABCD* на диагональ *AC*. Докажите, что перпендикуляры к прямым *AB* и *BC*, проведённые через точки *A* и *C* соответственно, пересекутся на прямой *DM*.

5. Через каждую вершину параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями четырёх проведённых прямых, перпендикулярны сторонам параллелограмма.

6. Дана линейка, на которой через каждый сантиметр отмечены деления. Используя только ее, постройте какую-нибудь прямую, перпендикулярную данной прямой.

7. Диагонали выпуклого четырехугольника *ABCD* взаимно перпендикулярны. Через середины сторон *AB* и *AD* проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам *CD* и *CB*. Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой *AC*.

8. В прямоугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны CD. Через точку C проведен перпендикуляр к прямой BM, а через точку M – перпендикуляр к диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

9. Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

10. В треугольнике ABC: $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Точка M, лежащая внутри треугольника, такова, что $\angle AMB = 110^\circ$, $\angle BMC = 130^\circ$. Найдите угол MBC.