Дополнительные построения_2

На этом занятии вам опять будут предложены задачи, для рационального и красивого решения которых надо найти дополнительные построения. На предыдущем занятии по этой теме в условиях задач, чаще всего, были заданы треугольники, поэтому при их решении использовались дополнительные построения, характерные для треугольников. На этом занятии в условиях задач чаще встречаются четырехугольники. В связи с этим, полезно вспомнить несколько «классических» задач, которые вы, возможно, уже рассматривали на школьных уроках или факультативах.

1) В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны AD. В каком отношении отрезок BM делит диагональ AC?

[1 : 2, считая от вершины A, *два способа: теорема Фалеса или точка пересечения медиан*)].

2) Объясните построение трапеции: а) по четырем сторонам; б) по основаниям и диагоналям; в) по диагонали и радиусу вписанной окружности, если эта трапеция – равнобокая.

На этих примерах мы вспомнили основные факты и типовые дополнительные построения, которые вам пригодятся при решении некоторых задач. Для остальных задач дополнительные построения надо будет придумать.

Задачи для самостоятельного решения

1. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны. На большем основании AD выбрана точка M так, что $BM = MD = 3$ см. Найдите длину средней линии трапеции.

2. В трапеции с перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии. Докажите, что трапеция равнобокая.

3. В невыпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A, B и D равны по 45°. Докажите, что середины его сторон являются вершинами квадрата.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB отмечена точка M так, что $DM = AD$, а на стороне AD – точка N так, что $BN = AB$. Докажите, что $CM = CN$.

5. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. На продолжениях катетов AB и AC отложены равные отрезки BK и CL. Из точек A и B проведены перпендикуляры к KC, которые пересекли KL в точках F и E соответственно. Докажите, что $EF = FL$.

6. В треугольнике ABC на сторонах AB, AC и BC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $BF = 2CF$, $CE = 2AE$ и угол DEF – прямой. Докажите, что DE – биссектриса угла ADF.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$, $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

8. В четырехугольнике $ABCD$: $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

9. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

10. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC (угол C – прямой) касается сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Высоты треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке D. Найдите расстояние между точками C и D, если длины катетов треугольника ABC равны 3 и 4.