

Вспомогательные окружности

Многие геометрические конфигурации устроены так, что в условии окружностей нет, но мы сами находим точки, лежащие на одной окружности, и используем эту окружность для решения задачи.

Пример. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 , которые пересекаются в точке H (см. рис.).

А) Найдите на чертеже пять острых углов, равных между собой, и обоснуйте.

Ответ: например, $\angle CA_1B_1 = \angle CAB = \angle CHB_1 = \angle BHC_1 = \angle BA_1C_1$.

Решение. 1) Точки A , A_1 , B_1 и B лежат на окружности с диаметром AB (провести). Тогда $\angle CA_1B_1 = 90^\circ - \angle AA_1B_1 = 90^\circ - \angle B_1BA = \angle CAB$.

2) Точки C , A_1 , B_1 и H лежат на окружности с диаметром CH (провести). Тогда $\angle CA_1B_1 = \angle CHB_1$.

В любом из этих пунктов можно также использовать, что прямая CH содержит высоту CC_1 и рассмотреть прямоугольные треугольники CHB_1 и CAC_1 с соответственно равными углами.

3) $\angle CHB_1 = \angle BHC_1$ (вертикальные), $\angle BHC_1 = \angle BA_1C_1$ (точки B , H , A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BH) или $\angle BA_1C_1 = \angle CAB$ (аналогично п. 1).

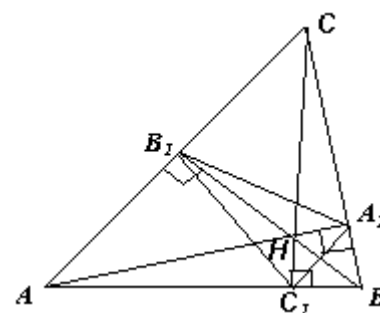
Обратите внимание, что попутно доказан следующий полезный факт: **отрезки, соединяющие основания высот треугольника, антипараллельны противоположным сторонам (по отношению к прямым, содержащим две другие стороны).**

Б) Докажите, что точка H – центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$.

Решение. Из доказанного в пункте А), в частности, следует, что **прямые, содержащие высоты треугольника ABC содержат биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$.**

В) Докажите, что точка C лежит **вне** окружности с диаметром AB , а точка H – **внутри** этой окружности.

Решение. Используем следующее утверждение: **угол AMB , где AB – диаметр окружности, является острым т. и т. т., когда M лежит вне окружности; б) является тупым т. и т. т., когда M лежит внутри окружности.**



Задачи для самостоятельного решения

- Общая гипотенуза AB прямоугольных треугольников ABC и ABD имеет длину 5 см. Найдите наибольшее возможное расстояние между точками C и D .
- Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a . Точка D находится от точки A на расстоянии a . Какие значения может принимать величина угла BDC ?
- На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O . Докажите, что CO – биссектриса прямого угла.
- В треугольнике ABC : $\angle C = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Внутри треугольника выбрана такая точка M , что треугольник CMB – равносторонний. Найдите углы MAB и MAC .
- В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ и $AB = BC$. Докажите, что треугольник ABD – равносторонний.
- Докажите, что медиана, проведенная из вершины тупого угла треугольника меньше половины стороны, к которой она проведена, а медиана, проведенная из вершины острого угла, – больше половины стороны, к которой проведена.
- В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C – тупые. Сравните длины диагоналей AC и BD .
- Дан квадрат $ABCD$. Луч AE пересекает сторону BC , причем $\angle BAE = 30^\circ$, а $\angle BCE = 75^\circ$. Найдите $\angle CBE$.

9. Равносторонние треугольники ABC и DFE расположены на плоскости так, что вершина B лежит внутри отрезка DE , а вершина F – внутри отрезка AC . Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются точки A, C, D и E .

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60^\circ$, $\angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$. Найдите BD , если $AB = 2$ см.

11. Дан неравносторонний остроугольный треугольник ABC . Вне его построены равнобедренные тупоугольные треугольники AB_1C и BA_1C с одинаковыми углами α при их основаниях AC и BC . Перпендикуляр, проведенный из вершины C к отрезку A_1B_1 пересекает серединный перпендикуляр к стороне AB в точке C_1 . Найдите угол AC_1B .