

### Вписанные углы и углы между касательной и хордой

В процессе решения задач мы уже сталкивались с углами, вписанными в окружность. Сегодня мы займемся ими вплотную. Вспомним (сделав соответствующие рисунки):

- 1) определения вписанного и центрального углов;
- 2) теорему о вписанном угле (два случая);
- 3) теорему об угле между касательной и хордой и теорему, ей обратную;
- 4) необходимые и достаточные условия того, чтобы 4 точки лежали на одной окружности (три эквивалентные формулировки).
- 5) что такое антипараллельность.

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что если биссектрисы углов выпуклого четырёхугольника при пересечении образуют четырёхугольник, то он – вписанный.
2. Диагонали равнобокой трапеции  $ABCD$  с боковой стороной  $AB$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что центр  $O$  её описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника  $APB$ .
3. Пусть  $O$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ . Окружность, проходящая через точки  $A$ ,  $O$  и  $B$  касается прямой  $BC$ . Докажите, что окружность, проходящая через точки  $B$ ,  $O$  и  $C$  касается прямой  $CD$ .
4. К двум окружностям, пересекающимся в точках  $K$  и  $M$ , проведена общая касательная. Докажите, что если  $A$  и  $B$  – точки касания, то  $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$ .
5. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$ :  $AB = BC = CD$ ,  $M$  – точка пересечения диагоналей,  $K$  – точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $D$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $M$ ,  $K$  и  $D$  лежат на одной окружности.
6. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Точка  $M$  – середина  $BC$ . Докажите, что: а) касательная в точке  $A$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  параллельна прямой  $B_1C_1$ ; б) прямые  $MB_1$  и  $MC_1$  касаются описанной окружности треугольника  $AB_1C_1$ .
7. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $C$ . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , лежит на данной окружности.
8. Дан параллелограмм  $ABCD$ . На стороне  $AB$  взята точка  $K$ , на стороне  $CD$  – точка  $L$ , на отрезке  $KL$  – точка  $M$ . Докажите, что вторая (отличная от  $M$ ) точка пересечения окружностей, описанных около треугольников  $AKM$  и  $MLC$ , лежит на диагонали  $AC$ .
9. На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $C_0$ ,  $A_0$  и  $B_0$  соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников  $AB_0C_0$ ,  $BC_0A_0$  и  $CA_0B_0$  проходят через одну и ту же точку.
10. В неравнобедренном треугольнике  $ABC$  проведена высота из вершины  $A$  и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведенной из вершины  $A$ .
11. Высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Прямая  $CH$  пересекает полуокружность с диаметром  $AB$ , проходящую через точки  $A_1$  и  $B_1$ , в точке  $D$ . Отрезки  $AD$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $M$ ,  $BD$  и  $AA_1$  – в точке  $N$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $B_1DM$  и  $A_1DN$  касаются.