

Задачи на построение

Что такое геометрическая задача на построение и что значит ее решить?

Задача на построение это задача, в которой требуется построить геометрический объект, пользуясь только двумя инструментами: циркулем и линейкой (односторонней и без делений).

Решение таких задач состоит не в том, чтобы проделать «руками» соответствующие построения и описать их, а в том, чтобы найти **алгоритм решения**, то есть, описать решение задачи в виде последовательности **уже известных стандартных построений**.

В этом смысле решение задач на построение хорошо иллюстрирует один из основных принципов решения любых математических задач: решить задачу это значит свести ее к какой-либо задаче, уже решенной ранее!

Какие построения циркулем и линейкой считать стандартными?

Это вопрос предварительной договоренности. Договоримся, к стандартным построениям отнести следующие:

- 1) построение прямой, проходящей через две заданные точки;
- 2) построение окружности с данным центром и данным радиусом;
- 3) построение отрезка, равного данному;
- 4) построение угла, равного данному;
- 5) построение середины отрезка (серединного перпендикуляра к отрезку);
- 6) построение биссектрисы угла;
- 7) построение перпендикуляра к прямой, проходящего через заданную точку (два случая).

На основе этих стандартных построений легко осуществляется **построение треугольников по трем основным элементам**: 1) двум сторонам и углу; 2) стороне и двум углам; 3) трем сторонам. При этом очень важно понимать, что все **линейные элементы** в условиях задач заданы в виде **отрезков** (а не их длин), а все угловые – в виде **углов** (а не чисел, выражающих их величину)!

Далее, к тем же типовым построениям сводятся также построения равнобедренных и прямоугольных треугольников по их основным элементам, а также построение прямой, параллельной данной и проходящей через заданную точку (как это сделать?).

Таким образом, можно провести некоторую аналогию между решением задач на построение и строительством домов: стандартные построения – это «кирпичи», задачи на построение различных видов треугольников по их основным элементам – «блоки».

Теперь, пользуясь этими «блоками», можно приступить к решению задач, причем решенная задача становится готовой «панелью», которую можно целиком использовать при решении других задач. При этом, для того, чтобы научиться решать задачи на построение (впрочем, как и другие геометрические задачи) очень важно осознавать, что решать их надо **с конца**, то есть не пытаться строить все, что умеешь, наугад, а представить себе, что искомый объект уже построен и, исходя из этого, восстановить цепочку возможных построений в виде крупных «блоков» или «панелей».

На первых порах при решении задач мы выделим два основных метода: **метод вспомогательного треугольника и метод геометрических мест точек**.

1) Суть метода вспомогательного треугольника – свести решаемую задачу к уже известной задаче на построение треугольника по основным элементам или к уже решенной задаче на построение треугольника по каким-то другим элементам.

Пример 1. Объясните, как построить треугольник по двум его углам и периметру.

Решение. Пусть искомый треугольник ABC с данным периметром P и углами α и β при вершинах A и B соответственно – построен. «Развернем» его, то есть на прямой AB отложим отрезок AD , равный AC , и отрезок BE , равный BC . Полученные толчки D и E соединим с точкой C (см. рис. 1).

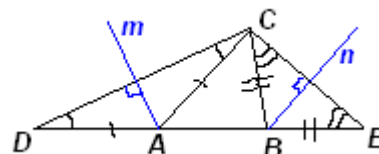


Рис. 1

Заметим, что треугольник ACD – равнобедренный, угол CAB – внешний для этого треугольника, поэтому $\angle CDA = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$. Аналогично, $\angle CEB = \angle ECB = \frac{\beta}{2}$.

Таким образом, задача сводится к построению **вспомогательного треугольника** CDE по стороне и двум прилежащим к ней углам ($DE = P$, $\angle CDE = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CED = \frac{\beta}{2}$). Для того, чтобы теперь получить вершины A и B искомого треугольника, достаточно, например, провести серединные перпендикуляры m и n к отрезкам CD и CE соответственно.

Отметим, что в подавляющем большинстве случаев, когда задана сумма (или разность) каких-либо отрезков, полезно сделать дополнительное построение, в результате которого заданный отрезок появляется на чертеже. Такой метод иногда называют «спрямлением» (и он применяется не только в задачах на построение).

2) Метод геометрических мест основан на том, что часть объектов, получаемых при стандартных построениях циркулем и линейкой, являются одновременно ГМТ, обладающих определенными свойствами. Например, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от заданной точки на фиксированное расстояние; серединный перпендикуляр к отрезку – ГМТ, равноудаленных от концов отрезка; биссектриса угла – ГМТ, лежащих внутри угла и равноудаленных от его сторон и т. д. Помимо этого, некоторые ГМТ несложно построить, используя простейшие построения, метод вспомогательных треугольников и уже построенные ГМТ.

Суть метода ГМТ состоит в следующем: **если некоторая точка X удовлетворяет двум условиям, то строятся ГМТ, удовлетворяющие каждому из этих условий, и тогда точка X принадлежит их пересечению.**

Пример 2. Объясните, как построить окружность, касающуюся данной прямой m и касающуюся данной окружности в данной точке A внешним образом.

Решение. Пусть даны прямая m и окружность с центром O , на которой отмечена точка A . Пусть искомая окружность построена, P – ее центр (см. рис. 2 а, б). Так как искомая окружность проходит через фиксированную точку A , то для построения этой окружности достаточно построить ее центр P . Так как окружности касаются в точке A внешним образом, то точки O , A и P лежат на одной прямой (A – между O и P).

Первый способ. Если через точку A провести также общую касательную AQ к этим окружностям (Q – точка ее пересечения с данной прямой m), то луч QP будет являться биссектрисой угла AQM (см. рис. 2а).

Таким образом, решение задачи сводится к построению луча OA , касательной QA к данной окружности и биссектрисы QP угла AQM . P – точка пересечения лучей OA и QP .

Второй способ. Рассмотрим перпендикуляры OD и PC , опущенные из центров данной и искомой окружности на прямую m (см. рис. 2б). Пусть B – одна из точек пересечения OD и данной окружности, тогда, так как $BD \parallel PC$, то $\angle OAB = \angle DBC = \angle PCB = \angle PAC$, значит, углы OAB и PAC – вертикальные, то есть точка A лежит на прямой BC . Следовательно, искомая точка P лежит на перпендикуляре, проведенном к данной прямой из точки C , которая является пересечением прямых m и AB .

Отметим, что если касательная QA параллельна прямой m (первый способ решения) или, что равносильно, точка A лежит на отрезке BD (второй способ решения), то решением задачи является окружность с диаметром AD .

Отметим также, что решая задачу вторым способом и выбрав вместо точки B ей диаметрально противоположную, получим не внешнее, а внутреннее касание окружностей.

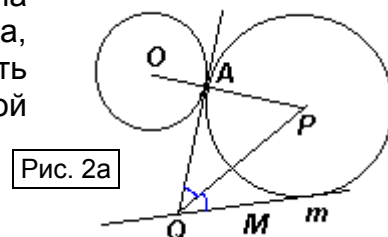


Рис. 2а

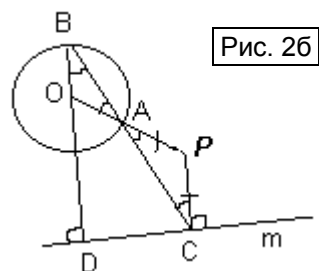


Рис. 2б

А как получить случай внутреннего касания при решении первым способом?
[Построить биссектрису угла, смежного с углом AQM]

Задачи для самостоятельного решения

1. Объясните, как построить треугольник по следующим данным:
 - а) двум углам и высоте (*рассмотрите два случая*);
 - б) двум сторонам и медиане (*рассмотрите два случая*);
 - в) трем медианам;
 - г) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон;
 - д) стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности;
2. Объясните, как построить прямоугольный треугольник по следующим данным:
 - а) гипотенузе и высоте, проведенной к гипотенузе;
 - б) острому углу и разности гипотенузы и катета.
3. Объясните, как построить окружность, которая касается данной прямой m в данной точке B и проходит через данную точку A , не лежащую на прямой m .
4. Даны три точки A , B и C . Объясните, как построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках.
5. Даны окружность и прямая m , ее не пересекающая. Объясните, как построить окружность, которая касается данной окружности и данной прямой в заданной точке Q , принадлежащей этой прямой.
- 6*. Объясните, как построить треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, которые проведены из одной вершины.