

Точки Брокара

10 класс
01.04.2017

Определение. Точкой Брокара треугольника ABC называется такая точка P , что $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP = \varphi$. Угол φ называется углом Брокара треугольника.

1. Докажите, что точка Брокара существует и единственна.
2. В треугольник ABC . На его сторонах вне треугольника построим треугольники с вершинами A' , B' и C' так, что $\triangle CA'B \sim \triangle CAB' \sim \triangle C'AB \sim \triangle ABC$.
 - (a) Докажите, что окружности, описанные около трех построенных треугольников, пересекаются в точке P .
 - (b) Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в этой же точке.
3. Несложно заметить, что по аналогичным причинам в треугольнике ABC существует и единственна такая точка Q , что $\angle CBQ = \angle BAQ = \angle ACQ = \psi$. Докажите, что $\psi = \varphi$, т.е. точки Брокара изогонально сопряжены относительно треугольника.
4. Докажите, что педальный треугольник точки P подобен треугольнику ABC .
5. Пусть A_1, B_1, C_1 – вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью треугольника ABC .
 - (a) Докажите, что треугольники ABC и $B_1C_1A_1$ равны.
 - (b) Докажите, что $OP = OQ$ и $\angle POQ = 2\varphi$.
6. Пусть α, β, γ – углы треугольника ABC . Докажите, что
 - (a) $\sin^3 \varphi = \sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi) \sin(\gamma - \varphi)$.
 - (b) $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$.
7. Пусть C' – такая точка на стороне AB , что прямая AC' является внешней биссектрисой угла $PC'Q$. Докажите, что CC' – симедиана треугольника, т.е. если в треугольник вписать эллипс с фокусами в точках Брокара, то он коснется сторон треугольника в основаниях симедиан.
8. Пусть L – точка Лемуана треугольника ABC . Докажите, что OL является диаметром описанной окружности треугольника OPQ .
9. Пусть T_1, T_2 – такие точки на прямой OL , что $\angle LPT_1 = \angle LPT_2 = 60^\circ$. Докажите, что T_1 и T_2 – точки Аполлония треугольника ABC .