

## Разнойой

10 класс

11.03.2017

1. Докажите, что середина отрезка, соединяющего проекции произвольной точки основания равностороннего треугольника на его боковые стороны, лежит на прямой, проходящей через эту самую точку и центр треугольника.
2. В остроугольный неравобедренный треугольник  $ABC$  вписан произвольный соответственно подобный ему треугольник  $A_1B_1C_1$  ( $A_1$  лежит на  $BC$ ,  $B_1$  лежит на  $CA$ ,  $C_1$  лежит на  $AB$ ),  $H$  — ортоцентр треугольника  $AB_1C_1$ . Докажите, что длина отрезка  $A_1H$  не зависит от выбора вписанного треугольника.
3. Маленькая окружность касается большой внутренним образом в точке  $X$ . Хорды  $AB$ ,  $AC$  большой окружности касаются маленьких в точках  $M$ ,  $N$  соответственно. Пусть  $B_0$ ,  $C_0$  — середины дуг  $AC$ ,  $AB$  соответственно (не содержащих других точек). Описанные окружности треугольников  $AMC_0$ ,  $ANB_0$  пересекаются в точке  $Y$ . Докажите, что  $AB_0YC_0$  — параллелограмм.
4. Через центр  $O$  описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$  проведена прямая, пересекающая стороны  $AB$ ,  $AC$  в точках  $X$ ,  $Y$ . Эти точки отразили относительно середин сторон, на которых они лежат (получили  $X'$ ,  $Y'$ ). Докажите, что  $\angle X'HY' = \angle BAC$ , где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .
5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  отметили центры  $O$  и  $I$  описанной и вписанной окружностей соответственно и ортоцентр  $H$ . Докажите, что  $OI \parallel BC \iff \angle AIH = 90^\circ$ .
6. В треугольнике  $ABC$  провели биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Оказалось, что прямые  $AA_1$  и  $B_1C_1$  пересекаются под углом  $60^\circ$ . Докажите, что один из углов треугольника  $A_1B_1C_1$  — прямой.