

## Тематический разнбой

10 класс

11.02.2017

1. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Их общая касательная (та, которая ближе к точке  $B$ ) касается окружностей в точках  $E$  и  $F$ . Прямая  $AB$  пересекает прямую  $EF$  в точке  $M$ . На продолжении  $AM$  за точку  $M$  выбрана точка  $K$  так, что  $KM = MA$ . Прямая  $KE$  вторично пересекает окружность, содержащую точку  $E$ , в точке  $C$ . Прямая  $KF$  вторично пересекает окружность, содержащую точку  $F$ , в точке  $D$ . Докажите, что точки  $C, D$  и  $A$  лежат на одной прямой.
2. Никакие три из четырех точек  $A, B, C, D$  не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников  $ABC$  и  $ABD$  равен углу между описанными окружностями треугольников  $ACD$  и  $BCD$ .
3. Отметим на прямой  $AB$  такие точки  $E$  и  $F$ , что  $CE = CF = p$ , где  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $EFC$  касается вневписанной окружности треугольника  $ABC$ , соответствующей стороне  $AB$ .
4. Пусть центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  касается сторон треугольника  $BC, CA, AB$  в точках  $M, N, P$ . Доказать, что ортоцентр треугольника  $MNP$  лежит на прямой  $OI$ , где  $O$  и  $I$  – центры описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ .
5. Пусть  $KL$  и  $KN$  – касательные из точки  $K$  к окружности  $\omega$ . Точка  $M$  – произвольная точка на прямой  $KN$  за точкой  $N$  и  $P$  – вторая точка пересечения  $\omega$  с описанной окружностью треугольника  $KLM$ . Точка  $Q$  – основание перпендикуляра из точки  $N$  на прямую  $ML$ . Докажите, что  $\angle MPQ = 2\angle KML$ .
6. Многогранник называется *кубоподобным*, если у него 8 вершин, 6 граней, каждая из которых является четырёхугольником, и в каждой вершине сходится по три грани. Докажите, что если 7 вершин кубоподобного многогранника лежат на одной сфере, то и восьмая тоже лежит на этой же сфере.