Разнобой

10 класс

14.01.2017

Задачи упорядочены случайно, а не как обычно, по сложности.[1]

1. Дан треугольник ABC. Пусть M и N – основания биссектрис, выпущенных из углов B и C соответственно, а D – точка пересечения луча MN с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что $\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}$.
2. Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника ABC в точках A и C, пересекаются в точке Z. AA_1, CC_1 – высоты. Прямая A_1C_1 пересекает прямые ZA, ZC в точках X и Y соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.
3. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90°$) отмечена точка T так, что треугольник ATD – остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 – центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.
4. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC лежат точки M, N, K соответственно, не совпадающие с вершинами. Треугольник MNK назовём *красивым*, если $\angle BAC = \angle KMN$ и $\angle ABC = \angle KNM$. Докажите, что если в треугольнике ABC существуют два красивых треугольника с общей вершиной, то треугольник ABC – прямоугольный.
5. Для трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) верно, что $\angle ABC > 90°$. Выбрали точку M на стороне AB. Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружеостей треугольников MAD и MBC соответственно. Пусть описанные окружности треугольников MO_1D и MO_2C повторно пересекаются в точке N. Докажите, что прямая O_1O_2 проходит через точку N.
6. На стороне AC треугольника ABC выбрана произвольная точка D. В треугольники ABD и CBD вписаны окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Общая внешняя касательная к ω_1 и ω_2, отличная от AC пересекает BD в точке X. Найдите отрезок BX.
7. Даны три непересекающиеся окружности ω_1, ω_2 и ω_3. Проведены все возможные внутренние касательные к ним. Докажите, что в шестиугольнике, образованным этими касательными, главные диагонали пересекаются в одной точке.
8. Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите на сторонах BC, CA, AB такие точки A', B', C', чтобы наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$ была минимальна.

[1] Это реально так.