Комбинаторная геометрия, часть 2

10 класс

27.05.2017

1. На плоскости даны несколько правильных n-угольников. Докажите, что выпуклая оболочка объединения всех этих n-угольников имеет не менее n вершин.

2. Найдите минимальное натуральное число k, т. ч. любой выпуклый 100-угольник можно получить пересечением k треугольников.

3. На плоскости даны три выпуклых многоугольника. Докажите, что их нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда любой из них можно отделить прямой от двух других.

4. Выпуклый фанерный многоугольник P лежит на деревянном столе. В стол можно вбивать гвозди, которые не должны проходить через P, но могут касаться его границы. Фиксирующим называется набор гвоздей, не позволяющий двигать P по столу. Найдите минимальное количество гвоздей, позволяющее зафиксировать любой выпуклый многоугольник.

5. Внутрь выпуклого центрально симметричного многоугольника P помещён треугольник T, внутри треугольника отмечена точка S. Докажите, что хотя бы одна из вершин треугольника T после симметрии относительно S останется внутри P.

6. Докажите, что строго внутри выпуклого $(3n+1)$-угольника P найдется точка, не содержащаяся строго внутри ни в одном $(n+2)$-угольнике с вершинами из подряд идущих вершин P.

7. Дан выпуклый n-угольник $n > 3$, никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Пусть m — число окружностей, проходящих через три подряд идущие вершины многоугольника и содержащих его внутри. Пусть k — число окружностей, проходящих через три попарно несоседние вершины многоугольника и содержащих его внутри. Докажите, что $m-k = 2$.