

Комбинаторная геометрия

10 класс

20.05.2017

1. \emptyset) На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения? (сдавать не надо)
 - а) На сколько частей делят пространство n плоскостей общего положения? Что вообще значит, что плоскости находятся в общем положении?
 - б) На сколько частей выпуклый многоугольник разрезается своими диагоналями (никакие три из которых не пересекаются в одной точке)?
2. На сфере отмечено n точек *общего положения*, т.е. никакие три не лежат на одной большой окружности (*большой окружностью* будем называть любое сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы). Две большие окружности будем называть *эквивалентными*, если одну из них можно перевести в другую, непрерывно поворачивая и не задевая при этом отмеченных точек. Какое максимальное число попарно неэквивалентных окружностей можно нарисовать на сфере?
3. На плоскости дано конечное множество прямых, имеющее общую точку O . Докажите, что это множество можно разбить на два подмножества и найти точку, отличную от O , сумма расстояний от которой до прямых одного подмножества будет равна сумме расстояний от той же точки до прямых второго подмножества.
4. Несколько прямых общего положения разделили плоскость на части. Докажите, что в эти части можно расставить положительные числа так, чтобы для каждой прямой суммы чисел по обе стороны от неё были равны.
5. В пространстве расположены четыре попарно скрещивающиеся прямые. Докажите, что существует полуплоскость, границей которой служит одна из прямых, не пересекающая трёх остальных прямых.
6. На плоскости расположено $n \geq 2$ отрезков так, что любые два из них пересекаются по внутренней точке, а никакие три из них не имеют общей точки. Иван выбирает один из концов каждого отрезка и сажает в него лягушку лицом к другому концу этого отрезка. Затем он $n - 1$ раз хлопает в ладоши. При каждом хлопке каждая из лягушек немедленно прыгает вперёд в следующую точку пересечения на её отрезке. Лягушки никогда не меняют направления своих прыжков. Иван хочет изначально рассадить лягушек так, чтобы никакие две из них никогда не оказались в одной точке пересечения одновременно.
 - а) Докажите, что Иван всегда может добиться желаемого, если n нечётно.
 - б) Докажите, что Иван никогда не сможет достичь желаемого, если n чётно.