Геометрические неравенства

10 класс

13.05.2017

1. В четырёхугольнике $ABCD$ угол A — тупой, F — середина BC. Докажите, что $2AF < BD+CD$.

2. В остроугольном треугольнике ABC сторона BC — наименьшая; B_1, C_1 — произвольные точки на сторонах AC, AB соответственно. Докажите, что длина ломанной BB_1C_1C не меньше удвоенной длины отрезка BC.

3. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Для какой точки X внутри треугольника достигается минимум величины $AG \cdot AX + BG \cdot BX + CG \cdot CX$? Выразите значение этого минимума в терминах длин сторон треугольника.

4. Внутри треугольника ABC отмечена точка X. Докажите, что выполнено хотя бы одно из трёх неравенств:
$$AX \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(p-a), BX \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(p-b), CX \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(p-c).$$

5. Пусть AD и BE — биссектрисы треугольника ABC. В четырёхугольник $AEDB$ вписан ромб так, что все вершины ромба лежат на разных сторонах четырёхугольника. Пусть φ — наименьший угол этого ромба. Докажите, что $\varphi \leqslant \max\{\angle BAC, \angle ABC\}$.

6. Пусть X — точка внутри треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Докажите, что $AX + BX + CX \geqslant 6r$.

Геометрические неравенства

10 класс

13.05.2017

1. В четырёхугольнике $ABCD$ угол A — тупой, F — середина BC. Докажите, что $2AF < BD+CD$.

2. В остроугольном треугольнике ABC сторона BC — наименьшая; B_1, C_1 — произвольные точки на сторонах AC, AB соответственно. Докажите, что длина ломанной BB_1C_1C не меньше удвоенной длины отрезка BC.

3. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Для какой точки X внутри треугольника достигается минимум величины $AG \cdot AX + BG \cdot BX + CG \cdot CX$? Выразите значение этого минимума в терминах длин сторон треугольника.

4. Внутри треугольника ABC отмечена точка X. Докажите, что выполнено хотя бы одно из трёх неравенств:
$$AX \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(p-a), BX \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(p-b), CX \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(p-c).$$

5. Пусть AD и BE — биссектрисы треугольника ABC. В четырёхугольник $AEDB$ вписан ромб так, что все вершины ромба лежат на разных сторонах четырёхугольника. Пусть φ — наименьший угол этого ромба. Докажите, что $\varphi \leqslant \max\{\angle BAC, \angle ABC\}$.

6. Пусть X — точка внутри треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Докажите, что $AX + BX + CX \geqslant 6r$.