Отрезки касательных

10 класс

25.03.2017

1. На сторонах AB, AD описанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки DX и BY пересекаются в точке Z. Докажите, что если $CBZD$ — описанный, то $AXZY$ — тоже описанный.

2. На сторонах AB, BC, CD, DA четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки K, L, M, N соответственно. Известно, что прямые AB, LN, CD пересекаются в одной точке; впрочем, как и прямые BC, KM, DA. Отрезки KM и LN пересекаются в точке S. Докажите, что из описанности четырёхугольников $AKSN$ и $CMSL$ следует описанность $ABCD$.

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD и отметили центры I_1, I_2 вписанных окружностей треугольников ABD и ACD. На отрезке I_1I_2 как на диагонали построен квадрат. Докажите, что две другие вершины этого квадрата лежат на прямых BC и AD.

4. На продолжении стороны BC треугольника ABC отмечены точки M и N таким образом, что касательные, проведённые к вневписанным окружностям ω_B и ω_C треугольника ABC из точек M и N соответственно, параллельны прямой AC. Прямые MI_B и NI_C пересекаются в точке D (I_B и I_C — центры ω_B и ω_C). Докажите, что $BD \perp BC$.

5. В угол вписаны две непересекающиеся окружности. На одной стороне угла отмечен точка A, на другой — точки B и C. Известно, что отрезок AB касается одной окружности, AC — другой.

   а) Докажите, что если $AB = AC$, то длина высоты треугольника ABC из вершины A равна сумме радиусов окружностей.

   б) Докажите, что середина линии центров исходных окружностей равноудалена от вершины A и точки касания вневписанной окружности треугольника ABC с отрезком BC.

6. В треугольнике ABC проведены чевианы AX и AY. Докажите, что центр положительной гомотетии, совмещающей вписанные в треугольники ABX и ACY окружности, совпадает с аналогичным центром для окружностей, вписанных в треугольники ACX и ABY.

7. Серые четырёхугольники описанные. Докажите, что $ABCD$ — тоже описанный.