Разнобой по геометрии

10 класс

21.01.2017

1. На описанной окружности ω треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг CAB, ABC, BCA соответственно. Докажите, что касательные к ω, восстановленные в точках B_1, C_1 и серединный перпендикуляр к отрезку AA_1 пересекаются в одной точке.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекают отрезок AD в точках P и Q. Докажите, что описанные окружности треугольников OPQ и OBC касаются.

3. Прямая ℓ пересекает отрезок BC в точке D. Постройте на ℓ всевозможные точки X, удовлетворяющие условию: $\angle BXD - \angle XBD = \angle CXD - \angle XCD$.

4. В угол BAC вписана окружность ω, B и C — точки касания ω со сторонами угла. На средней линии треугольника ABC, параллельной BC, отмечены точки X и Y. Из точек X и Y проведены отрезки касательных к ω, пересекающиеся в точке Z. Докажите, что в четырёхугольник $AXZY$ можно вписать окружность.

5. На сторонах AB, AC треугольника ABC отмечены точки U и V. Выяснилось следующее: 1) точки B, C, U, V лежат на одной окружности; 2) центр вневписанной окружности треугольника AUV, касающейся отрезка UV, лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке UV.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность ω_1 с центром на стороне AB пересекает стороны AB и BC в точках X и P соответственно. Окружность ω_2 с центром на стороне AC касается внешним образом окружности ω_1 в точке K и пересекает стороны AC и CB в точках Y и Q соответственно. Докажите, что всевозможные прямые а) XK и YK; б) PK и QK проходят через фиксированные точки, не зависящие от ω_1 и ω_2.