Полувписанная окружность

10 класс

17.12.2016

Давайте на сегодня заведем следующие обозначения для элементов треугольника ABC:

- ω – вписанная окружность, I – ее центр, A_1, B_1, C_1 — точки ее касания со сторонами;
- $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ – вневписанные окружности, A_2, B_2, C_2 – точки их касания со сторонами;
- Ω – описанная окружность, O – ее центр;
- A' и A'' – середины дуг BC, соответственно не содержащей и содержащей точку A; B' и B'', C' и C'' – аналогично.

Полувписанной будем называть окружность S_A, касающуюся сторон AB, AC и окружности Ω (внутренним образом) в точках K, L, T_A. Аналогично определяются окружности S_B, S_C и соответствующие точки касания T_B и T_C.

1. Точки T_A, K, C' (а также T_A, L, B') лежат на одной прямой.
2. **(Лемма Варрьера)** Точки K, I, L лежат на одной прямой, причем I совпадает с серединой KL.
3. **a)** T_AA – симедиана треугольника $B'T_AC'$;

   b) T_AA'' — медиана треугольника $B'C'T_A$;

   c) Точки T_A, I, A'' лежат на одной прямой.
4. Докажите, что CC' касается описанной окружности четырехугольника T_ABKI.
5. **a)** Прямые AT_A, BT_B, CT_C пересекаются в одной точке X, которая является центром гомотетии с положительным коэффициентом между окружностями ω и Ω.

   b) Докажите, что AA' – биссектриса угла T_AAA_2.

   c) Докажите, что точка, изогонально симметричная точке Нагеля, совпадает с точкой X.
6. Прямая, проходящая через вершину A, пересекает сторону BC, окружность Ω в точках E, F. Тогда точки T_A , A_1, E, F лежат на одной окружности.
7. Прямая AB касается описанной окружности треугольника BA_1T_A.
8. Прямые KL, T_AA' и BC пересекаются в одной точке или параллельны.