Линейные функции

10 класс

26.11.2016

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если при любом линейном движении произвольной точки плоскости значение функции в ней линейно зависит от времени. То же самое формально: для любой точки A и любого вектора $\mathbf{v}$ существует такой коэффициент $k \in \mathbb{R}$, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $f(A + t \cdot \mathbf{v}) = f(A) + k \cdot t$.

1. Докажите утверждения:

   а) *Ориентированное расстояние* от точки X до прямой ℓ — линейная функция.

   б) Координата (на ℓ) проекции точки X на фиксированную прямую ℓ — линейная функция.

   в) *Ориентированная площадь* треугольника XBC — линейная функция.

   г) Функция, заданная в координатах формулой $f(x, y) = Ax + By + C$, линейна.

   д) Две линейные функции, совпадающие в трёх неколлинеарных точках, равны всюду.

   е) Все линейные функции в координатах задаются формулами вида $f(x, y) = Ax + By + C$.

   ж) Если f и g — линейные функции, что $f + g$ и λf — вновь линейные ($\lambda \in \mathbb{R}$).

   з) Множеством нулей линейной функции служит прямая, плоскость или пустое множество.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1, на отрезке B_1C_1 отмечена произвольная точка P. Докажите, что расстояние то точки P до прямой BC равно сумме расстояний от точки P до прямых AB и AC.

3. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке P, а сторон AD и BC — в точке Q. Пусть X, Y — точки пересечения биссектрис углов BAD и BCD, ABC и ADC, Z — точка пересечения внешних биссектрис углов APC и AQC. Докажите, что X, Y , Z лежат на одной прямой.

4. а) Внутри треугольника ABC нашли три точки K, M, N, не лежащие на одной прямой, такие что сумма расстояний от них до сторон постоянна. Докажите, что треугольник правильный.

   б) Внутри четырехугольника $ABCD$ нашли три точки K, M, N, не лежащие на одной прямой, такие что сумма расстояний от них до сторон постоянна. Что можно утверждать в этом случае?

5. а) Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой.

   б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна оси, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

   в) Сформулируйте, нарисуйте и докажите аналогичные утверждения для прямой, соединяющей два основания внутренних биссектрис и основание внешней.

6. Дан треугольник ABC. Прямая ℓ_A параллельна биссектрисе угла A и делит ломаную BAC пополам. Докажите, что ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C пересекаются в одной точке.

7. (*И снова прямая Гаусса*) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые BC и AD пересекаются в точке F. Докажите, что середины отрезков AC, BD и EF лежат на одной прямой.

8. (*Прямая Ньютона*) Докажите, что в описанном четырехугольнике центр вписанной окружности лежит на его прямой Гаусса.

9. Точки пересечения медиан треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ лежат на одной прямой. Докажите, что 27 треугольников $A_iB_jC_k$ можно разбить на две группы так, чтобы суммы площадей треугольников в группам были одинаковыми.