

Воробьями по пушкам

10 класс
08.10.2016

Пусть дан неравносторонний треугольник ABC , на его сторонах AB и BC взяты точки C_0 и A_0 . B_1 – середина дуги ABC описанной окружности, I – инцентр, M – середина стороны AC .

Воробей №1. $AC_0 = CA_0$ тогда и только тогда, когда A_0, C_0, B_1, B лежат на одной окружности.

Воробей №2. $AC_0 + CA_0 = AC$ тогда и только тогда, когда A_0, C_0, I, B лежат на одной окружности.

1. Дан неравносторонний треугольник ABC , B_1 середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC , M – середина стороны AC . Докажите, что центры I_A и I_C вписанных окружностей в треугольники AMB и $СМВ$, точки B и B_1 лежат на одной окружности.
2. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D . Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0 , где A_0 и C_0 точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.
3. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. В треугольник ABC вписана окружность с центром I . Пусть I_A и O_A – центры вписанной и описанной окружностей треугольника AB_1C_1 соответственно; I_B, O_B, I_C, O_C определяются аналогично.
 - а) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $I_A I_B I_C$ совпадает с I .
 - б) Докажите, что центр вписанной окружности треугольника $O_A O_B O_C$ совпадает с I .
4. Дан неравносторонний треугольник ABC , B_1 – середина дуги ABC описанной окружности ω треугольника ABC , I – центр вписанной окружности в ABC , M – середина стороны AC . Докажите, что $\angle IB_1B = \angle IMA$.
5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает стороны BC, CD в точках P и Q . Докажите, что центр описанной окружности треугольника CPQ лежит на описанной окружности треугольника B_1CD .
6. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки C_1 и A_1 , отличные от вершин. Пусть K – середина A_1C_1 , а I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Оказалось, что четырёхугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой.
7. Пусть на стороне AC выбрана точка D . Обозначим через I_A и I_C центры вписанных окружностей в треугольники ABD и $СВD$, а через B_0 точку касания вписанной окружности со стороной AC . Докажите, что угол $I_A B_0 I_C$ прямой.
8. Точки E и F – середины большой дуги AC и малой дуги AC описанной около остроугольного неравностороннего треугольника ABC ($AB < BC$). Пусть G – проекция E на BC . Докажите, что описанная окружность около треугольника ABG проходит через середину отрезка BF .