

Задачи по геометрии

10 класс
10.12.2016

Задачи упорядочены случайно, а не как обычно, по сложности.

1. Точка M – середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$. Оказалось, что $\angle AMD = 90^\circ$. Чему равен угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$?
2. На окружности отмечены точки A, B, C, D, E и F . Разобьем эти точки на два треугольника и отметим точку, являющуюся серединой отрезка, соединяющего ортоцентры этих треугольников. Докажите, что положение этой точки не зависит разбиения на треугольники.
3. Дан треугольник ABC . Внеписанная окружность касается его стороны BC в точке A_1 и продолжений двух других сторон. Другая внеписанная окружность касается стороны AC в точке B_1 . Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N . На луче AA_1 отметили точку P , такую что $AP = NA_1$. Докажите, что точка P лежит на вписанной в треугольник окружности.
4. В треугольник ABC вписан ромб $CKLN$ так, что точка L лежит на стороне AB , точка N на стороне AC , точка K на стороне BC . Пусть O_1, O_2 и O центры описанных окружностей треугольников ACL, BCL и ABC соответственно. Пусть P – точка пересечения описанных окружностей треугольников ANL и BKL , отличная от L . Докажите, что точки O_1, O_2, O и P лежат на одной окружности.
5. Пусть H_A, H_B, H_C – основания высот треугольника ABC , проведенных из вершин A, B, C соответственно, и пусть O – центр описанной окружности. Отметим на BC такие точки A_1, A_2 , что $A_1H_A = H_AO = H_AA_2$. Аналогично определим точки B_1, B_2 и C_1, C_2 . Докажите, что точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.
6. Ортоцентр H треугольника ABC лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами A, B, C , проходящие через H , имеют общую касательную.
7. Дан вписанный в окружность четырехугольник $ABCD$. Внутри треугольника отметили такую точку P , что $\angle PAB = \angle DAC$ и $\angle BCP = \angle ACD$. Докажите, что $BP = PD$.