

# Гармонический четырехугольник

10 класс

19.11.2016

Назовем вписанный четырехугольник  $ABCD$  *гармоническим*, если  $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ .

1. Докажите, что  $ABCD$  гармонический тогда и только тогда, когда касательные к окружности в точках  $B$  и  $D$  пересекаются на прямой  $AC$ .
2. Что происходит с гармоническим четырехугольником при инверсии относительно одной из его вершин?
3. Пусть  $M$  – середина диагонали  $AC$ . Докажите, что  $ABCD$  – гармонический, тогда и только тогда, когда  $\angle AMB = \angle DCB$
4. Пусть  $M$  – середина диагонали  $AC$ . Докажите, что  $ABCD$  – гармонический, тогда и только тогда, когда  $\angle AMB = \angle AMD$
5. В параллелограмме  $ABCD$  дана точка  $M$ , такая что  $\angle MAD = \angle MCD$ . Докажите, что  $\angle MBA = \angle MDA$ .
6. В остроугольном треугольнике  $ABC$  на высоте  $BK$  как на диаметре построена окружность  $\Omega$ , пересекающая стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. К окружности  $\Omega$  в точках  $E$  и  $F$  проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения  $P$  лежит на прямой, содержащей медиану треугольника  $ABC$ , проведенную из вершины  $B$ .
7. В окружности  $\Omega$  проведены две параллельные хорды  $AB$  и  $CD$ . Прямая, проведенная через  $C$  и середину  $AB$ , вторично пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Точка  $K$  – середина отрезка  $DE$ . Докажите, что  $\angle AKE = \angle BKE$ .