Разнобой

10 класс

05.11.2016

1. Возьмем треугольник ABC. Вневписанные окружности, соответствующие вершинам A и B, касаются сторон BC и AC в точках A_1 и B_1. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам AA_1 и BB_1 пересекаются на биссектрисе угла C.

2. Пусть F — проекция середины D основания BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) на медиану CE треугольника ACD. Докажите, что $\angle AFB = 90°$.

3. Внутри треугольника ABC взята точка P так, чтобы $AP + BC = BP + AC$. Пусть вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC и AC в точках A_1 и B_1, а вписанная в треугольник ABP окружность касается сторон BP и AP в точках A_2 и B_2. Докажите, что точка A_1, B_1, A_2, B_2 лежат на одной окружности.

4. Пусть P и Q — проекции точки X описанной окружности треугольника ABC на стороны AB, AC; M и N — середины BC и XY соответственно. Докажите, что $\angle XNM = 90°$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром BD. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BD, точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC. Пусть P – точка пересечения прямых CA_1 и BD, Q – точка пересечения прямых DB_1 и AC. Докажите, что $AC \perp PQ$.

6. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки P, лежащей внутри остроугольного треугольника ABC, на стороны BC, CA и AB соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает прямую AC в точке K. Описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ вторично пересекает сторону AC в точке L. Докажите, что $KP \perp BL$.

7. Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — середины «меньших» дуг AB, BC, CD, DA, а I_1, I_2, I_3, I_4 — центры вписанных окружностей треугольников ABX, BCX, CDX, DXA. Докажите, что M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в одной точке.

Разнобой

10 класс

05.11.2016

1. Возьмем треугольник ABC. Вневписанные окружности, соответствующие вершинам A и B, касаются сторон BC и AC в точках A_1 и B_1. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам AA_1 и BB_1 пересекаются на биссектрисе угла C.

2. Пусть F — проекция середины D основания BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) на медиану CE треугольника ACD. Докажите, что $\angle AFB = 90°$.

3. Внутри треугольника ABC взята точка P так, чтобы $AP + BC = BP + AC$. Пусть вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC и AC в точках A_1 и B_1, а вписанная в треугольник ABP окружность касается сторон BP и AP в точках A_2 и B_2. Докажите, что точка A_1, B_1, A_2, B_2 лежат на одной окружности.

4. Пусть P и Q — проекции точки X описанной окружности треугольника ABC на стороны AB, AC; M и N — середины BC и XY соответственно. Докажите, что $\angle XNM = 90°$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром BD. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BD, точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC. Пусть P – точка пересечения прямых CA_1 и BD, Q – точка пересечения прямых DB_1 и AC. Докажите, что $AC \perp PQ$.

6. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки P, лежащей внутри остроугольного треугольника ABC, на стороны BC, CA и AB соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает прямую AC в точке K. Описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ вторично пересекает сторону AC в точке L. Докажите, что $KP \perp BL$.

7. Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — середины «меньших» дуг AB, BC, CD, DA, а I_1, I_2, I_3, I_4 — центры вписанных окружностей треугольников ABX, BCX, CDX, DXA. Докажите, что M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в одной точке.